This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

**Über dieses Buch**

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

**Nutzungsrichtlinien**

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

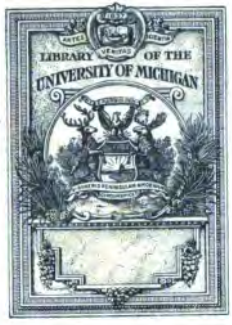
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

**Über Google Buchsuche**

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.




FROM THE LIBRARY OF

Professor Karl Heinrich Rau

OF THE UNIVERSITY OF HEIDELBERG

PRESENTED TO THE

UNIVERSITY OF MICHIGAN

BY

Mr. Philo Parsons

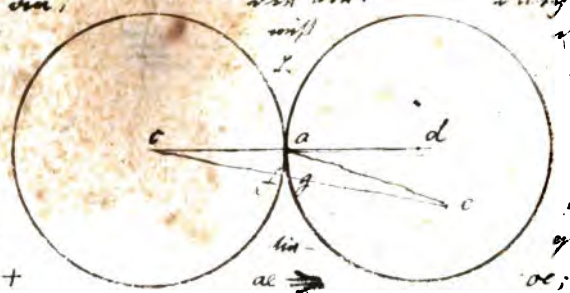
OF DETROIT

1871

QA
35
B927
G5
1798
wr.lpt

C.RAU.MDCCCV.

ad §. 114 Gram. C. 302. Weiss Satz



Thomas Bugge,

Justizraths und Professors der Mathematik und Astronomie an der Kopenhagener Universität, Lectors der Mathematik beym See-Etat, Mitgliedes der Gesellschaften der Wissenschaften und Akademien in London, Stockholm, Paris, Kopenhagen, Mauheim und Drontheim,

# Erste Gründe

der

# Arithmetik, Geometrie und ebenen Trigonometrie.

## Ein Lehrbuch

für Schulen und Selbstlernende.

Aus dem Dänischen übersetzt

von

Ludolph Hermann Tobiesen,

Doctor der Philosophie und Mitgliede der physikalischen Gesellschaft in Göttingen.

Mit 17 Kupfertafeln.

Altona,

bey Johann Friedrich Hammerich.

1800.

1800

Thomas Bugge,
Justizraths und Professors der Mathematik und Astronomie an der Kopenhagener Universität, Lectors der Mathematik beym See-Etat, Mitgliedes der Gesellschaften der Wissenschaften und Akademien in London, Stockholm, Paris, Kopenhagen, Manheim und Dronthei[illegible]

PRINCETON LIBRARY University of MICHIGAN

# Lehrbuch der gesammten Mathematik

oder

## Vorlesungen

über

## die mathematischen Wissenschaften.

### Ersten Theils erste Abtheilung

oder

### Arithmetik, Geometrie und ebene Trigonometrie.

Aus dem Dänischen übersetzt

von

Ludolph Hermann Tobiesen,
Doctor der Philosophie und Mitgliede der physikalischen Gesellschaft in Göttingen.

Mit 17 Kupfertafeln.

Altona,
bey Johann Friedrich Hammerich.
1800.

C. Rau.

# Vorbericht des Uebersetzers.

Als ich vor bald zwey Jahren meine Uebersetzung der **Feldmeßkunst des Herrn Justizrath Bugge** herausgab, war es gleich meine Absicht, das ganze Werk desselben in einer deutschen Uebersetzung den Liebhabern der Mathematik vorzulegen. Damals war vom Original nur noch der erste Band erschienen, von welchem ich die zweyte Hälfte, nämlich die Feldmeßkunst, und zwar deßhalb nur diese übersetzte und herausgab, weil, da ich mancherley anderer Arbeiten wegen die Uebersetzung des ganzen ersten Theils nicht liefern konnte, ich mir bey den zahlreichen schon vorhandenen Lehrbüchern der reinen Mathematik für den practischen Theil mehr Leser als für den theoretischen versprach. Auch beweisen einige mir zu Gesicht gekommene vortheilhafte Beurtheilungen der übersetzten Feldmeßkunst und ein nicht geringer Absatz dieses Werks, daß das Publikum diese Arbeit mit Beyfall aufgenommen hat. Ein

Gleiches hoffe ich für die folgende Ueberſetzung der Arithmetik, Geometrie und ebenen Trigonometrie, die ich hiemit dem Publikum übergebe und welche die erſte Hälfte des erſten Bandes des mehr gedachten Werks iſt. Dieſer erſte Band zerfällt alſo in zwey Abtheilungen, deren erſte die reine Mathematik oder die eben genannten Wiſſenſchaften und die zweyte die practiſche Geometrie oder Feldmeßkunſt befaßt, weßhalb letztere auch noch einen zweyten Titel in Beziehung auf das Ganze erhält.

Vom zweyten Bande, der die Analyſis und analytiſche Geometrie begreift, iſt bereits vor einiger Zeit die erſte Abtheilung oder die Analyſis erſchienen, welche gleichfalls zur nächſten Oſtermeſſe von mir überſetzt herauskommen wird, wenn anders der Druck, da das Manuſcript ſchon völlig fertig bey mir liegt, bis dahin noch vollendet werden kann. Ob ich nun auch die Theile, die noch folgen werden, überſetzen ſoll oder nicht, darüber mag das Publikum durch ſeine Stimme entſcheiden.

Ich weiß, einem Ueberſetzer erwächſt aus ſeinen Bemühungen nur wenig literariſches Verdienſt (ausgenommen jedoch bey Werken des Genies, zu welchen der Ueberſetzer ſicherlich nicht weniger Talente mitbringen muß, als der Schöpfer derſelben in ſie hineinlegte); ich weiß auch, daß dieſes Verdienſt bey Ueberſetzung mathematiſcher Schriften deſto unbedeutender iſt, je leichter ſich den-

denjenigen Foderungen, die man an den Ueberſetzer hiſtoriſcher, philoſophiſcher und anderer Werke macht und darin beſtehen, daß man ihm die Verpflichtung auflegt, ſein Original in Form und Materie treulich darzuſtellen, hier ein Gnüge leiſten läßt; dennoch aber, glaube ich, liegt darin etwas Verdienſtliches für den Ueberſetzer mathematiſcher Schriften, wenn er ſeine Arbeit, zumal wenn dieſe dem Schulgebrauch gewidmet iſt, correct und ſoviel als möglich von Druckfehlern gereinigt, dem Leſer in die Hand gibt und hiernach habe ich nach Möglichkeit geſtrebt. Sollten aber demnoch einige wenige meiner wiederhohlten Aufmerkſamkeit entgangen ſeyn, ſo bedarf es derentwegen wohl um ſo weniger einer Entſchuldigung, je häufiger man ja heut zu Tage mathematiſche Werke ſieht, denen Druckfehler-Verzeichniſſe von mehrern Blättern angehängt ſind.

Die reine Mathematik hat auf dem Titel den Zuſatz für Schulen und Selbſtlernende, welcher ſich aus der Vorrede des Verfaſſers ergibt und den Endzweck des Buchs näher bezeichnet, dem man es auch angemeſſen finden wird. Jeder Theil bekommt einen doppelten Titel, einen, der ſich auf das ganze Werk und einen, der ſich auf den jedesmaligen Theil bezieht und für einen ſolchen Käufer gilt, der nur dieſen oder jenen Theil verlangt. Die Vermehrung mathematiſcher Lehrbücher für den Schulgebrauch wird wohl nicht von mir entſchuldigt werden dürfen,

wenn anders die zuweilen laut werdende Klage, daß der Unterricht in der Mathematik auf vielen Schulen noch immer sehr verwahrloset werde, gegründet ist. Der Uebersetzer kann dieser Klage aus eigner unangenehmen Erfahrung in seinen Schuljahren beystimmen, obgleich er für sich daraus den wichtigen Vortheil zog, daß je weniger er in dieser schon in früher Jugend ihm zum Lieblingsstudium gewordenen Wissenschaft durch die Bemühung seines Lehrers erlernte und erlernen konnte, er desto mehr durch selbstthätigen beharrlichen Privatfleiß gewann und einen mangelhaften Unterricht durch Wolffs, Eberts und Kästners Lehrbücher zu ergänzen wußte — eine Methode, die aber nur demjenigen Nutzen schafft, der aus Mangel einer hülfreichen Hand acht und mehr Tage über einem schweren Satze des Euklides unverdrossen zubringen konnte, voll Begierde, dieses Meisterstück des Alterthums kennen zu lernen. Kann aber wohl der Unterricht in dieser Wissenschaft so wie in der Physik (von der das Gesagte fast in einem noch höhern Grade gilt) gedeihen, wenn Ernesti initia doctrinæ solidioris (ein Werk, dessen Werth ich übrigens weit entfernt bin zu verkennen) den Leitfaden zu demselben hergeben müssen? Jedoch ist hier nicht der Ort, über die zweckmäßigere Einrichtung dieses Theils des Schulunterrichts ausführlicher zu reden; dem Uebersetzer verbleibt dazu noch eine bequemere Gelegenheit.

Ich

Ich wünsche und hoffe, daß gegenwärtiges Werk, welches Deutlichkeit im Vortrage mit Gründlichkeit in der Methode vereinigt, zur Verbesserung des fehlerhaften Unterrichts in den mathematischen Wissenschaften beytragen könne und werde und dann hat der Uebersetzer seine Absicht erreicht.

Hamburg, den 2. Februar 1800.

L. H. T.

---

## Verbesserungen.

Pag. 79 §. 52. streiche man ? weg. p. 80 im ersten Beyspiel muß 852 gerade unter 170 stehen. p. 359 Anmerk. Ludolph von Ceulen war nicht aus Cöln sondern aus Middelburg gebürtig.

# Vorrede des Verfassers.

Bereits seit vielen Jahren war ich darauf bedacht, ein Lehrbuch der mathematischen Wissenschaften herauszugeben. Als erste Probe hievon erschienen im Jahr 1772 die ersten Gründe des Rechnens und der Algebra. Zwar war ich so glücklich zu sehen, daß dieses Buch den Beifall meiner sachkundigen Landsleute erhielt; aber die vielen und großen Aufmessungen, Nivellements und andere practische Arbeiten, welche mir als Ober-Landmesser von der Königl. Rentekammer aufgetragen wurden, hinderten mich einige Jahre hindurch, auf die Fortsetzung dieses Werks zu denken. Im Anfange des Jahrs 1777 ward ich zum öffentlichen Lehrer der Mathematik und Astronomie an der Kopenhagener Universität bestellt und dadurch in einen andern und neuen Wirkungskreis versetzt. Das Observatorium ward aufgeführt, neue Instrumente wurden angeschafft, aufgestellt und geprüft. Mit diesen sollten astronomische Beobachtungen angestellt werden, wodurch Dänemark einigermaaßen

wieder

wieder in den Besitz der astronomischen Ehre käme, welcher es sich in den Zeiten eines Brahe, Römer und des ältern Horrebow erfreute. Das war Amtspflicht; ich hoffe auch, daß die von mir herausgegebenen Schriften und Abhandlungen bezeugen, daß ich mich nach Möglichkeit bestrebt habe, dieser Pflicht ein Gnüge zu thun. Im Jahre 1778 gab ich eine Beschreibung der **Aufmessungs-Methode, welche bey den Dänischen geographischen Karten befolgt ist,** heraus, bey welchen die trigonometrischen Operationen und astronomischen Observationen, auf welche die Lage des Kopenhagener Observatoriums und die Länge und Breite der Hauptpuncte in Seeland, auf einem Theil der Inseln und der schoonschen Küste sich gründen, meine Arbeiten von 1762 bis 1769 sind, während welcher Zeit ich bey den geographischen Aufmessungen arbeitete. Im Jahre 1784 gab ich eine **Sammlung astronomischer Beobachtungen, angestellt von 1777 bis 1784,** heraus, bey welcher Gelegenheit ich zugleich die neuen Instrumente des Observatoriums beschrieb und eine neue und genaue Bestimmung der Länge und Breite des Kopenhagener Observatoriums mittheilte. Ueberdieß ließ ich Beobachtungen und Abhandlungen größtentheils astronomischen Inhalts in die Abhandlungen der schwedischen Akademie der Wissenschaften, in die Schriften der Londoner und Kopenhagener Gesellschaft der Wissenschaften

und in Bodens astronomisches Jahrbuch einrücken. Sollte ich gleich durch diese Arbeiten nicht so glücklich gewesen seyn, zur Erweiterung der Grenzen der Wissenschaften etwas beygetragen zu haben, so hoffe ich doch, daß man sie als unverkennbare Proben angewandten Fleißes und ununterbrochener Thätigkeit ansehen werde. Diese Arbeiten und mehrere mir anbefohlene öffentliche Verrichtungen haben mich von der Fortsetzung des angefangenen Lehrbuchs abgehalten. Inzwischen habe ich nun 18 Jahre hindurch Vorlesungen beynahe über alle Theile der Mathematik vor den Offizieren der Königl. Marine, den Offizieren des Königl. Artillerie-Corps, den Studierenden auf der Kopenhagener Universität und andern Liebhabern der Wissenschaften gehalten. Diese Vorlesungen sind mehrere Male durchdacht, dem Fassungsvermögen der Anfänger angepaßt und nach dem Zuwachs und Fortgang der Wissenschaften umgearbeitet. Es würde ohne Zweifel zum großen Vortheil für den innern Gehalt der Lehrbücher gereichen, wenn öffentliche Lehrer statt ihre Laufbahn mit Bekanntmachung der Vorlesungen, die sie erst zu halten Willens sind, zu beginnen, selbige vielmehr mit Herausgebung derjenigen Vorlesungen, die sie wirklich mehrere Male gehalten, endigten.

Der Hauptplan, den ich bey diesen Vorlesungen vor Augen hatte, war die Aufführung eines vollständigen Lehrgebäudes der Elementar-

Mathe-

Mathematik und in der Anwendung derselben so weit als möglich zu gehen. Man wird daher auch die elementarische Theorie vollständig ausgearbeitet finden, so wie die Anwendung derselben auf practische Arbeiten nicht vermissen. Dadurch wird die Mathematik nicht allein eine Wissenschaft, welche auf eine vorzügliche Weise den Verstand übt und schärft nnd uns auch in andern Fällen lehrt, unsere Gedanken zu ordnen und richtig zu schließen, sondern sie wird dadurch zugleich eine wichtige und unentbehrliche Wissenschaft für die bürgerliche Gesellschaft, zur richtigen Anlegung, beständigen Verbesserung und vollkommnern Einrichtung vieler Dinge.

In Rücksicht auf diesen Hauptplan theilte ich das Werk in vier Bände, von welchen **der erste** die Arithmetik, Geometrie, die ebene Trigonometrie und die Feldmeßkunst (*) begreift. **Der zweyte Band** enthält die Analysis oder Buchstabenrechnung, die Lehre von den Gleichungen, sowohl von den einfachen als auch von den quadratischen, kubischen und höhern Gleichungen, ferner unendliche Reihen, Binomial-Formel, die hyperbolischen Logarithmen, die analytische Geometrie und Trigonometrie und endlich

(*) Letztere ist von mir besonders übersetzt worden unter dem Titel: Theoretisch-practische Anleitung zum Feldmessen von Thomas Bugge, übersetzt von L. H. Tobiesen. Altona bey J. F. Hammerich 1798.

endlich die koniſchen Sectionen oder Parabel, Ellipſe und Hyperbel. **Der dritte Band** handelt von den mechaniſchen Wiſſenſchaften, nämlich von der eigentlichen Mechanik, Statik, Hydroſtatik, Aeroſtatik, Hydraulik und Maſchinen-Lehre. **Der vierte Band** befaßt die optiſchen und aſtronomiſchen Wiſſenſchaften, nämlich die eigentliche Optik, Katoptrik, Dioptrik, die ſphäriſche Trigonometrie, die ſphäriſche und theoretiſche Aſtronomie, die mathematiſche Geographie, Chronologie und Gnomonik. Die techniſche Mathematik d. h. die Baukunſt, Schiffsbaukunſt, Artillerie und Fortification bleiben außerhalb des Plans dieſes Lehrbuchs, weil die Größe und der Preis dieſes Werks beträchtlich vermehrt werden würden, wenn dieſe Wiſſenſchaften hier abgehandelt werden ſollten, als welches nicht ohne viele und koſtbare Zeichnungen geſchehen könnte. Dieſe vier Bände machen alſo ein vollſtändiges und ganzes Werk aus.

So viel von dem Plan des ganzen Werks im allgemeinen; ich komme jetzt zum Inhalt des erſten Bandes insbeſondere. Die **Einleitung** enthält einen Umriß und eine kurze Darlegung der verſchiedenen Theile der Mathematik nach dem jetzigen Zuſtande dieſer Wiſſenſchaft. Die **Arithmetik** handelt zuerſt von der Natur der Zahlen, den vier Rechnungsarten in ganzen Zahlen, gemeinen Brüchen und Decimal-Brüchen. Dann werden die Quadrat- und Kubiczahlen und die

Aus-

Ausziehung der Wurzeln erklärt. Darauf folgt die in der ganzen Mathematik so wichtige Lehre von den Verhältnissen und Proportionen. Ich habe es am richtigsten und kürzesten gefunden, die Theorie der Proportionen aus der Natur der Brüche herzuleiten, weil vier Zahlen, welche in geometrischer Proportion sind, im Grunde nichts anders als zwey gleich große Brüche sind. Dann habe ich die Proportions-Regel oder Regula Detri, sowohl die directe als indirecte, sowohl die einfache als zusammengesetzte, die Gesellschafts- und Alligations- oder Mischungs- und Zins-Rechnung abgehandelt. Ich habe die practischen Handgriffe und Abkürzungen bey der Regula Detri nebst den theoretischen Gründen, worauf sie beruhen (welche Abkürzungen man zwar in den practischen Rechenbüchern findet, aber blos als practische Regeln ohne Gründe) angeführt. Die Arithmetik endigt sich mit der Theorie der briggischen Logarithmen als der gewöhnlichsten und gebräuchlichsten in den logarithmischen Tafeln, deren Anwendung auf Rechnung mit Brüchen, Regula Detri, Quadrat- und Kubiczahlen und Ausziehung der Wurzeln und auf die Verwandlung eines Fußmaaßes in ein anderes erklärt wird; die allgemeine Theorie der Logarithmen und der hyperbolischen Logarithmen insbesondere soll im zweyten Bande abgehandelt werden. Leser, welche sich die Mühe geben wollen, diese meine gegenwärtige Arithmetik mit der

1772 von mir herausgegebenen zu vergleichen, werden finden, daß die ganze Arithmetik völlig umgearbeitet ist, daß die allermeisten Beweise gänzlich verändert und auf eine andere Weise geführt und die Sätze in einer veränderten Ordnung aufgestellt sind.

Die ebene Geometrie fängt mit Erklärungen der Linien und Flächen an, geht darauf zu den Eigenschaften der Winkel und schneidender Linien und dann zur Gleichheit der Dreyecke und den daraus fließenden Eigenschaften derselben über. Nun folgt die Theorie der Parallellinien. Diese hat zu allen Zeiten ihre Schwierigkeiten gehabt, welche ich hier nicht wiederhohle, sondern den Leser auf die Anmerkung zu §. 62 verweisen will. Wenn man meine positive Erklärung von Parallellinien annimmt, daß sie nämlich zwey Linien sind, welche beyde senkrecht auf einer dritten Linie stehen und diese positive Erklärung eben so evident findet als Euklids negative Erklärung, daß Parallellinien nicht zusammenlaufen, so hoffe ich auch, daß man sich mit meinem Beweise der Eigenschaften der Parallellinien begnügen werde. Ferner wird gehandelt von den Parallelogrammen, den Eigenschaften des Kreises und von den geometrischen Proportionen ähnlicher Figuren und Linien. Dann folgen die regulären Polygone und die Berechnung des Inhalts oder die Quadratur sowohl dieser als des Kreises. Ich wünschte, daß diese von unsern Quadratur-

Fabri-

Fabrikanten recht gefaßt und verstanden werden möchte; dies steht indeß wohl kaum zu erwarten, da Leute der Art sich um solche Kleinigkeiten, als geometrische Beweise sind, nicht bekümmern. Den Beschluß der ebenen Geometrie macht die Vergleichung ähnlicher ebener Figuren.

Die Stereometrie fängt mit der Lage der Ebenen gegen einander und der Lage der Linien gegen Ebenen an. Obgleich diese Lehre in vielen Lehrbüchern übergangen wird, so glaube ich doch, daß man sie nicht übergehen müsse, weil sie bey unzähligen Gelegenheiten sowohl in der theoretischen als practischen Mathematik gebraucht und angewandt wird. So kann man z. B. in der Feldmeßkunst diese Lehre nicht entbehren. Dann wird von den Eigenschaften, der Berechnung und Vergleichung der Prismen, Parallelepipeda, Cylinder, Pyramiden und Kegeln, und endlich der Kugel und der regulären geometrischen Körper gehandelt. Was die practische Anwendung der Stereometrie auf die Baukunst, Fortification, den Inhalt der Fäßer oder die Visirkunst und die Berechnung des Inhalts der Schiffe anbetrifft, so gestattete der Raum die Erklärung dieser übrigens sehr nützlichen Dinge nicht, sondern ich mußte vielmehr mich damit begnügen, auf die neuesten und besten Schriften über diese Gegenstände zu verweisen.

Die ebene Trigonometrie erklärt die trigonometrischen Linien, was sie sind und wie sie gefun-

den werden und lehrt die Auflösung der Dreyecke und die Berechnung ihrer Seiten und Winkel sowohl in rechtwinklichten als schiefwinklichten ebenen Dreyecken.

In einer Schrift, welche die ersten Gründe einer Wissenschaft abhandelt, wird man keine neue Entdeckungen erwarten; eben so wenig muß man glauben, daß ich den thörichten Gedanken genährt habe, ein Lehrbuch liefern zu können, welches alle andere verdrängen und die vortreflichen Anleitungen eines Käſtner, Karſten, Lorenz und anderer überträfe. Mein Beſtreben ging bloß dahin, die Mathematik auf die einfachſte Weiſe, in einer guten Ordnung und mit aller möglichen Deutlichkeit vorzutragen, ſo daß ſelbſt diejenigen, welche eine mündliche Unterweiſung entbehren müſſen, ſich einigermaaßen im Studium der Mathematik ſelbſt forthelfen könnten. Inzwiſchen hoffe ich, daß der denkende Leſer finden werde, daß ich nicht ſklaviſch andern gefolgt bin oder ſelbige ausgeſchrieben habe, ſondern daß ſich vielmehr in der Anordnung und Verbindung der Sätze etwas finde, was ich meine eigene Arbeit nennen darf.

Das iſt eine kurze Ueberſicht des Inhalts des erſten Bandes meiner Vorleſungen. Ich würde mich glücklich ſchätzen, wenn dieſes Werk den Beyfall ſachkundiger und unpartheyiſcher Beurtheiler erhielte. Ich würde mich für hinreichend belohnt anſehen, wenn ich zur allgemeinen Ausbreitung und richtigen Anwendung gründlicher,

wich-

wichtiger und nützlicher Kenntnisse etwas beytragen könnte. Es ist unläugbar, daß Naturkenntnisse, Naturgeschichte, Naturlehre, Chemie, und Botanik täglich mehr Bearbeiter und Liebhaber erhalten. Jeder Freund des Vaterlandes und der wahre Kenner der Wissenschaften müssen sich darüber freuen und ich bin weit entfernt, den beträchtlichen und ausgebreiteten Nutzen dieser vortreflichen Wissenschaften bey unzähligen bürgerlichen Einrichtungen zu verkennen. Aber diese Wissenschaften machen doch nicht alles aus; in allen solchen Fällen bey der Beobachtung der Natur, wo es auf die Bestimmung des Maaßes und der Größe der Naturkräfte und Naturwirkungen ankommt (und wie oft kommen nicht solche Fälle vor?) kann man die Mathematik nicht entbehren. Die höhere Mathematik wird zu allen Zeiten und aller Orten eben nicht viele Liebhaber finden; aber die Elementar-Mathematik ist für das Militair, für den Ingenieur und Artilleristen insbesondere, für den Seemann, den Mühlenbauer und Maschinisten und für verschiedene Künstler und Handwerker durchaus unentbehrlich. Ein hoher Grad von Vollkommenheit in allen diesen Verrichtungen und Arbeiten ist ohne vorläufiges Studium verschiedener Theile der Mathematik unmöglich und es würde mich freuen, wenn diese Vorlesungen zu einer solchen Ausbreitung der mathematischen Wissenschaften etwas beytragen könnten.

# Inhalt.

## Einleitung.

Eintheilung, Beschaffenheit und Nutzen der mathematischen Wissenschaften. Seite 1.

## Arithmetik.

Erstes Kapitel. S. 25.

Allgemeine Gründe der Arithmetik. Erklärung der Zahlen §. 2-5. Allgemeine Zeichen §. 5. Allgemeine Grundsätze §. 6.

Zweytes Kapitel. S. 30.

Vom Zählen und der Bezeichnung der Zahlen durch Zeichen. Vom Zählen §. 7. Von den Ziffern §. 8. Numeration §. 9.

Drittes Kapitel. S. 35.

Von den vier Rechnungsarten oder Spezies in ganzen Zahlen. Addition §. 10-12. Subtraction §. 12-14. Multiplication §. 14-19. Division §. 19-24. Rechnung mit benannten Zahlen §. 24.

Viertes Kapitel. S. 51.

Von den gemeinen Brüchen. Erklärung der Brüche §. 25-29. Aufhebung der Brüche §. 29-38. Gleichnamige Brüche §. 38. Addition §. 39. Subtraction §. 40. Addition und Subtraction ganzer

zer und gebrochener Zahlen §. 41. Multiplication §. 42-45. Division §. 45-47.

**Fünftes Kapitel.** S. 75.

**Von Decimalbrüchen.** Erklärung derselben §. 47-49. Addition §. 49. Subtraction §. 50. Multiplication §. 51-53. Division §. 53-55. Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche §. 55.

**Sechstes Kapitel.** S. 95.

**Von den Quadrat- und Kubikzahlen.** Erklärung §. 56-58. Wurzeltäfelchen §. 58. Gleiche Wurzeln §. 59. Quadrat eines Bruchs §. 60. Jede Zahl, welche sich nicht in zwey gleiche Factoren auflösen läßt, hat keine Quadratwurzel §. 61. Das Quadrat einer ganzen Zahl ist eine ganze Zahl u. s. w. §. 62-64. Quadrat einer zweytheiligen Wurzel und Ausziehung derselben §. 64-66. Kubus einer zweytheiligen Wurzel und Ausziehung derselben §. 66-68. Rationale Größen §. 68.

**Siebentes Kapitel.** S. 118.

**Von arithmetischen und geometrischen Verhältnissen und Proportionen.** Erklärung des arithmet. Verhältnisses und der arithmet. Proportion §. 69-71. Summe der äußern und mittlern Glieder §. 71-73. Geometrisches Verhältniß und Proportion §. 73-82. Indirecte Proportion §. 82-84. Summen, Differenzen u. s. w. der Verhältnißglieder §. 84-91. Zusammensetzung der Pro-

portionen §. 91-96. Die mittlere, die dritte u. ſ. w. Proportionalzahl zu finden §. 96-99.

**Achtes Kapitel.** S. 145.

Regula Detri. Erklärung §. 99. Directe §. 100-102. Verkehrte §. 102. Zuſammengeſetzte §. 103-105. Theilungsrechnung §. 105. Alligationsrechnung §. 106. Zinsrechnung §. 107.

**Neuntes Kapitel.** S. 175.

Logarithmen. Erklärung der arithmet. und geometr. Reihe §. 108. 109. Erklärung der Logarithmen §. 110. Logarithmenſyſtem §. 111. Den Logarithmen einer Zahl, eines Products u. ſ. w. zu finden §. 112-116. Anwendung der Logarithmen zur Berechnung der vierten Proportionalzahl u. ſ. w. §. 116-120. Logarithme eines Bruchs §. 120-123. Multiplication und Diviſion der Brüche durch Logarithmen §. 123-125. Anwendung der Logarithmen auf Zinsrechnung und Verwandelung des Fußmaaßes §. 125. 126.

## Ebene Geometrie.

**Erſtes Kapitel.** S. 207.

Grundbegriffe der Geometrie. Erklärungen der Ausdehnung und der Geometrie §. 1. Des geometriſchen Körpers und der Stereometrie §. 2. Der Elementar- und höhern Geometrie, der theoretiſchen und practiſchen §. 3. Des Puncts, der Linie, der geraden

geraden und krummen §. 4-8. Der ebenen und krummen Fläche §. 8. Des Winkels §. 9. Nebenwinkel §. 10. Der senkrechten Linie §. 11. Einer Figur §. 12. Des Kreises §. 13-15. Postulate der Geometrie §. 15. Congruenz §. 16. Der Linien, Winkel und Figuren §. 17-20.

Zweytes Kapitel. S. 222.

Eigenschaften der Winkel und schneidender Linien. Bestimmung der Größe der Winkel §. 20. Durchmesser des Kreises §. 21-23. Bogen zwischen den Schenkeln der Winkel §. 23-28. Concentrische Kreise §. 28. Transporteur §. 29. Zeichnung eines Winkels, der so groß als ein anderer ist §. 30. Nebenwinkel betragen 180° §. 31-33. Alle Winkel um einen Punct = 360° §. 33. Scheitelwinkel §. 34-36.

Drittes Kapitel. S. 237.

Congruenz der Dreyecke und daraus fließende Eigenschaften. Ebenes, geradlinichtes, gleichseitiges, gleichschenklichtes u. s. w. Dreyeck §. 36. Congruenz der Dreyecke aus 2 Seiten und dem eingeschlossenen Winkel §. 37-39. Gleichheit der Winkel an der Grundlinie in einem gleichschenklichten Dreyeck §. 39. Das gleichseitige Dreyeck hat lauter gleiche Winkel §. 40. Congruenz der Dreyecke aus drey Seiten §. 41. Halbirung der Winkel §. 42. Ziehung eines Perpendikels §. 43-45. Halbi-

rung einer Linie §. 45. Congruenz der Dreyecke aus einer Seite und zwey anliegenden Winkeln §. 46-48. Aeußerer Winkel §. 48. Schlußfolgen §. 49. Lehrsätze von Dreyecken §. 50-58. Congruenz rechtwinklichter Dreyecke §. 58.

Viertes Kapitel. S. 255.

Theorie der Parallellinien und daraus fließende Eigenschaften der Dreyecke. Erklärung der Parallellinien §. 59. Lehrsätze von denselben §. 60-66. Summe der Winkel im Dreyeck §. 66-69.

Fünftes Kapitel. S. 268.

Eigenschaften der Parallelogramme und Berechnung drey- und vierseitiger Figuren. Erklärung des Quadrats, Rechtecks u. s. w. §. 69. Lehrsätze von vierseitigen Figuren, Zeichnung derselben §. 70-79. Lehrsätze von Parallelogrammen §. 79-84. Vom Maaße der Flächen §. 84. Berechnung des Quadrats u. s. w. §. 85-88. Berechnung des Dreyecks §. 88-92. Des Trapezium's §. 92. Pythagorischer Lehrsatz §. 93-97. Parallelogramm durch zwey Linien bestimmt §. 97-103.

Sechstes Kapitel. S. 295.

Vom Kreise. Tangente, Chorden und Bogen §. 103-107. Durchmesser auf der Chorde §. 107-110. Den Mittelpunct eines Kreises zu finden §. 110. Durch drey Puncte kann man einen Kreis beschreiben §. 111. Berührende Kreise und berüh-

ende Linien §. 113-121. Centrâl- und Peripherie-winkel §. 121-131. Dreyeck und Quadrat in und um den Kreis §. 131-137.

Siebentes Kapitel. S. 316.

Aehnliche Figuren und proportionirte Seiten. Proportionen beym Parallelogramm und Dreyeck §. 137-141. Proportionallinien §. 141-147. Erklärung ähnlicher Figuren §. 147. Aehnlichkeit der Dreyecke aus 3 gleichen Winkeln §. 148-152. Aehnlichkeit der Dreyecke aus 2 proportionirten Seiten und der Gleichheit des eingeschlossenen Winkels §. 152. Aehnlichkeit der Dreyecke aus 3 proportionirten Seiten §. 153. Theilung einer Linie §. 154-157. Aehnliche rechtwinklichte Dreyecke §. 157-160. Verkehrt proportionirte Linien §. 160-164.

Achtes Kapitel. S. 336.

Eigenschaften und Inhalt regulärer Polygone nebst Inhalt des Kreises. Erklärungen §. 164. Polygone in und um den Kreis §. 165-171. Linie nach stetiger Proportion geschnitten §. 171-176. Aehnlichkeit der Polygone §. 176-180. Perimeter derselben §. 181. Inhalt der Polygone §. 182-185. Inhalt des Kreises §. 125-204.

Neuntes Kapitel. S. 372.

Vergleichung des Inhalts ebener Figuren. Parallelogramme und Dreyecke von gleichem Inhalt

und einem gleichen Winkel verhalten sich verkehrt wie die Seiten, die diesen Winkel einschließen, §. 204-207. Aehnliche Dreyecke und Polygone verhalten sich wie die Quadrate ähnlicher Seiten §. 207-210. Aehnliche Segmente wie die Quadrate der Radien §. 210. Aehnliche Figuren an den Seiten eines rechtwinklichten Dreyecks und Zeichnung derselben §. 211-215.

## Stereometrie
oder
## körperliche Geometrie.

**Erstes Kapitel.** S. 384.

**Von der Lage der Ebenen.** Erklärungen §. 216-219. Bestimmung der Lage einer Ebene §. 219-223. Von Linien, die senkrecht auf einer Ebene sind §. 223-230. Von senkrechten Ebenen §. 230-234. Von parallelen Ebenen §. 234-237.

**Zweytes Kapitel.** S. 397.

**Vom Prisma und dem Parallelepipedum.** Erklärungen §. 237-240. Lehrsätze vom Prisma und Parallelepipedum §. 240-250. Körpermaaß §. 250. Oberfläche des Kubus §. 251. Inhalt und Oberfläche jedes Prismas §. 252-254.

**Drittes Kapitel.** S. 415.

**Vom Cylinder, der Pyramide und dem Kegel.** Erklärungen §. 254. Vom Durchschnitt des Cylinders §. 255. Gleiche Cylinder §. 256. Verhält-

hältniß zweyer Cylinder §. 257. Inhalt des ganzen und abgeschnittenen Cylinders §. 258-260. Oberfläche desselben §. 260-262. Erklärung der Pyramide §. 262. Vom Durchschnitt der Pyramide §. 263. Kegel §. 264. Vom Durchschnitt desselben §. 265-267. Vergleichung des Kegels mit der Pyramide §. 267. Zertheilung des Prismas in drey Pyramiden §. 268-270. Inhalt der Pyramide und des Kegels §. 270-272. Oberfläche derselben §. 272-277.

Viertes Kapitel. S. 440.

Kugel und reguläre Körper. Erklärung der Kugel §. 277. Durchschnitt derselben §. 278. Größter Kreis §. 279. Kugelkreise §. 280-285. Vergleichung der Kugel mit dem Cylinder und Inhalt derselben §. 285-288. Oberfläche der Kugel §. 288-292. Kugelsector §. 291-293. Kugelsegment §. 293-297. Vergleichung der Oberfläche einer Kugel mit der Oberfläche eines Cylinders und Vergleichung der Oberflächen zweyer Kugel §. 297-299. Reguläre Körper und deren Berechnung §. 299-301.

Ebene Trigonometrie.

Erstes Kapitel. S. 468.

Trigonometrische Linien. Erklärung der Trigonometrie §. 1. Des Sinus §. 2. Des Cosinus §. 3. Der Tangente §. 4. Der Secante §. 5.

Com-

Complementwinkel haben gleichen Sinus u. s. w. §. 6. Bestimmung trigonometrischer Linien §. 7-12. Trigonometrische Tafeln. Anmerk. zu §. 12.

Zweytes Kapitel. S. 492.

Auflösung rechtwinklichter Dreyecke. Verhältnisse der Seiten rechtwinklichter Dreyecke §. 13-20. Tafel über alle Fälle bey rechtwinklichten Dreyecken §. 20.

Drittes Kapitel. S. 501.

Auflösung schiefwinklichter Dreyecke. Die Seiten eines Dreyecks verhalten sich wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel §. 21. Berechnung eines Dreyecks aus einer Seite, einem anliegenden und einem opponirten Winkel §. 22. Berechnung eines Dreyecks aus der Grundlinie und den anliegenden Winkeln §. 23. Aus zwey Seiten und einem opponirten Winkel §. 24. Aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel §. 25 und 26. Auf eine andere Weise §. 27. Aus drey Seiten §. 28. Tafel über alle Fälle bey schiefwinklichten Dreyecken §. 29.

---

Ein-

# Eintheilung, Beschaffenheit und Nutzen der mathematischen Wissenschaften.

§. 1.

Eine **Größe** (quantitas) ist, was aus Theilen besteht. Man legt nicht allein materiellen, sondern auch andern Dingen Größe bey, wenn man sich in denselben Theile denken kann; so spricht man von Größe der Bewegung, des Drucks, der Schwere, Klarheit des Lichts u. s. w. **Größen messen** heißt eine gewisse Größe von derselben Art zur Einheit (unitas) oder zum Maaßstabe annehmen und untersuchen, wie oft diese Einheit in der gegebenen Größe enthalten ist. Die Messung der Größen kann entweder durch wirkliche Aufmessung geschehen, daß man nämlich den Maaßstab an die zu messende Größe bringt, wie der Landmesser seine Grundlinien mit der Kette aufmißt; oder daß man nur einige wenige Größen mißt, und die übrigen durch Schlüsse bestimmt. So

stellt der Landmesser seinen Meßtisch in beyden Endpuncten der gemessenen Grundlinie auf, und entwirft alle in gedachten Endpuncten sichtbare Objecte auf der Karte. Könnte man nicht durch Schlüsse und Berechnungen die Größe der Dinge bestimmen, so würden unsere Kenntnisse nur höchst eingeschränkt und unvollkommen seyn. Wie würden wir dann den Abstand der Oerter vom Aequator, die Geschwindigkeit des Lichts, die Entfernung der Planeten von der Sonne, die Kraft des Pulvers, die Höhe des Dunstkreises und unzählige andere Dinge bestimmen können, welche beym ersten Anblick die Kräfte des menschlichen Verstandes zu übersteigen scheinen? **Die Mathematik ist die Wissenschaft, welche vorzüglich durch Schlüsse und Berechnungen Größen zu messen lehrt.**

§. 2.

Jede Größe kann entweder als bloß aus Theilen bestehend betrachtet werden, und ohne darauf Rücksicht zu nehmen, von welcher Beschaffenheit die Theile sind, aus welchen die Größe besteht, ob es Luft, Wasser u. s. w. ist; oder ob es Theile der Bewegung, Entfernung u. s. w. sind, und dann heißt die Größe eine **abstracte Größe.** Eine **concrete Größe** ist eine wirklich vorhandene Größe, deren Theile von einer bestimmten Art sind; z. B. Wasser, Luft, Licht, Bewegung im allgemeinen, Stoß der Körper, Bewegung

wegung der Himmelskörper insbesondere u. s. w. Die **reine Mathematik** (matheſis pura) lehrt abſtracte Größen auszumeſſen und zu berechnen; die **angewandte Mathematik** beſtimmt und berechnet concrete Größen. Da beſondere Sätze ſich immer auf allgemeine gründen müſſen, ſo folgt, daß die angewandte Mathematik die reine Mathematik vorausſetzt.

## §. 3.

Bey einer abſtracten Größe kann zweyerley betrachtet werden. Zuerſt kann man nämlich die Anzahl der Theile unterſuchen, oder aus wie vielen Theilen dieſelbe beſteht, und das leitet auf den Begriff einer **Zahl**, welche eine Menge Einheiten oder einzelner Theile iſt. Dann läßt ſich zweytens unterſuchen, ob die Theile, aus welchen die Größe beſteht, zuſammenhängen oder an einander liegen, und daraus entſteht der Begriff der **Ausdehnung**. Die Wiſſenſchaft der Zahlen und deren Eigenſchaften heißt die **Arithmetik** oder **Rechenkunſt**. Die Wiſſenſchaft von der Ausdehnung und Ausmeſſung derſelben iſt die **Geometrie**. Da alſo jede abſtracte Größe entweder eine Zahl oder eine Ausdehnung iſt, ſo folgt daraus, daß die reine Mathematik nur aus zwey Theilen, nämlich der Arithmetik und Geometrie, beſtehet. (§. 2.)

## §. 4.

Dennoch werden zur reinen Mathematik folgende besondere Wissenschaften gerechnet: die **Arithmetik**, **Geometrie**, **Trigonometrie** und die **analytischen Wissenschaften**. Die Arithmetik und Geometrie sind bereits erklärt (§. 3.) Die **Trigonometrie** lehrt aus drey gegebenen Stücken eines Dreyecks die übrigen Seiten und Winkel zu berechnen. Dreyecke oder von drey Linien begränzte Figuren sind entweder ebene, geradlinichte und auf einer Ebene beschriebene oder sphärische, d. h. auf der Oberfläche einer Kugel von drey größten Kreisbogen eingeschlossene Dreyecke. Die **ebene Trigonometrie** lehrt ebene und geradlinichte Dreyecke zu berechnen. **Die sphärische Trigonometrie** bestimmt sphärische Dreyecke. **Die analytischen Wissenschaften** (Analysis) erklären die Kunstgriffe und Methoden, welche man in der Mathematik zur Entwickelung der Größen und Auffindung dessen, was man sucht, anwendet. Die Größen sind entweder **endliche** (quantitates finitæ), welche bestimmte Gränzen haben, oder **unendliche** (infinitæ), welche keine bestimmte Gränzen haben, oder bey welchen man die Menge der Theile nicht bestimmen kann. Diese sind wieder entweder **unendlich große** (infinite magnæ), welche größer als jede andere gegebene endliche Größe sind, oder **unendlich kleine** (infinite parvæ), welche kleiner als

jede

jede andere gegebene endliche Größe sind. Dadurch zerfallen die analytischen Wissenschaften in die **Analysis endlicher Größen** (Analysis finitorum), welche das Unbekannte durch Hülfe endlicher Größen zu finden lehrt, und in die **Analysis unendlicher Größen** (Analysis infinitorum) oder Infinitesimal-Rechnung, welche unbekannte Größen durch Hülfe unendlich kleiner Größen zu bestimmen lehrt. Die **Analysis endlicher Größen** besteht aus folgenden Theilen: 1) die **Buchstabenrechnung** (Calculus literalis, arithmetica specioſa vel univerſalis) lehrt statt der Zahlen mit Buchstaben zu rechnen, welche noch allgemeinere Zeichen abstracter Größen sind. 2) Die **Algebra** zeigt, wie man vermittelst Gleichungen, d. h. gleich bedeutender Ausdrücke aus der Verbindung, welche vermöge der Natur der Sache zwischen bekannten und unbekannten Größen in der Aufgabe Statt hat, diese zu finden. 3) Die **höhere Geometrie** (geometria ſublimior) erklärt die Natur und Eigenschaften krummer Linien, nämlich der Kegelschnitte, Parabel, Hyperbel und Ellipse, welche beym Schnitt eines Kegels zum Vorschein kommen, und anderer krummen Linien, z. B. der Conchoide, Ciſſoide, Cycloide, Spirallinie u. s. w. Die Gränzen der **Elementar-** und **höhern Geometrie** bestimmen sich dadurch, daß diejenigen Aufgaben, welche durch gerade Linien und vermittelst des

Kreises aufgelöset werden können, zur Elementar-Geometrie gehören; aber solche Aufgaben, deren Auflösung krumme Linien und den Kreis erfodert, der höhern Geometrie vorbehalten sind. Die Analysis unendlicher Größen bestehet aus zwey Theilen, der **Differential-** und **Integral-Rechnung.** Jede Größe, welche ab- oder zunehmen, kleiner oder größer werden kann, heißt eine **veränderliche Größe.** Die unendlich kleinen Größen, durch welche veränderliche Größen in einer unendlich kleinen Zeit wachsen oder abnehmen, heissen ihre **Differentiale** oder nach der Benennung der Engländer ihre **Fluxionen.** Die Differential-Rechnung lehrt, wenn die veränderlichen Größen gegeben sind, ihre Differentiale zu finden. Die **Integral-Rechnung** zeigt, wie man aus den Differentialen die Größe selbst finden kann, welche auf die durch die Differentiale angegebene Weise zugenommen oder abgenommen hat. Die Engländer nennen die **Differential-Rechnung** die **directe Fluxions-Rechnung,** und die **Integral-Rechnung** die **verkehrte Fluxions-Rechnung.** Ungeachtet alle diese Wissenschaften der reinen Mathematik angehören, so besteht diese doch eigentlich nur aus zwey Theilen, der Arithmetik und Geometrie. Die ebene und die sphärische Trigonometrie handeln von der Ausdehnung, und sind also nur Theile der Geometrie. Man hat sie wegen ihres ausgebreiteten Nutzens in der

ganzen

ganzen Mathematik überhaupt, und in der Astronomie, Geographie und Navigation insbesondere zu zwey besondern Disciplinen gemacht. Die Analysis enthält eigentlich nur die Methode und die Kunst der mathematischen Auflösung (ars heuristica); ist also keine besondere Wissenschaft. Beym Gebrauch derselben wendet man sie entweder auf Zahlen an, und dann gehört sie zur Arithmetik oder auf Ausdehnung, Linien, Winkel, Figuren, Körper, und dann macht sie einen Theil der Geometrie aus.

§. 5.

Wenn die Lehrsätze der reinen Mathematik zur Ausmessung und Berechnung der Größe, Bewegung und Wirkung der Naturobjecte angewandt werden, so heißt sie die **angewandte Mathematik**. Die Menge ihrer Theile hängt also von der mehr oder weniger großen Vollkommenheit unserer Kenntnisse von den Naturobjecten ab. Sind diese zu der Reife gediehen, daß man die Naturbegebenheiten ausmessen und berechnen kann, so entsteht dadurch ein neuer Theil der angewandten Mathematik. Nach dem heutigen Zustand unserer Kenntnisse läßt sich die Mathematik anwenden 1) auf das Gleichgewicht und die Bewegung fester und flüssiger Körper, und daraus entspringen die **mechanischen Wissenschaften**; 2) auf den geradlinichten Gang, die Reflexion und Refraction der Lichtstrahlen, und daraus entstehen die

optischen Wissenschaften; 3) auf die Himmelskörper und die Erdkugel, und daraus kommen die kosmologischen oder astronomischen Wissenschaften zum Vorschein; 4) auf allerley Arten von Gebäuden, und das giebt der technischen Mathematik ihren Ursprung.

§. 6.

Unter festen Körpern versteht man solche, deren Theile mit merklicher Kraft zusammenhängen. Flüßige Körper heissen hingegen diejenigen, deren Theile nur mit geringer und unbedeutender Kraft zusammenhängen. Elastische Körper sind solche, welche sich zwar in einen kleinern Raum zusammenpressen lassen, aber ihren vorigen Raum und die vorige Figur wieder annehmen, sobald der Druck aufhört. So ist die Stahlfeder ein harter, das Wasser ein flüßiger und Luft und der Dampf des kochenden Wassers elastische Körper. Unelastische Körper sind solche, welche durch keine äußere Kraft sich in einen kleinern Raum zusammendrücken lassen. Nach einigen ältern Versuchen hatte man lange Zeit hindurch angenommen, das Wasser sey unelastisch; aber die neuesten Versuche beweisen, daß es sich zusammendrücken läßt, obgleich so wenig und vermittelst einer so großen Kraft, daß man ohne merklichen Fehler das Wasser als unelastisch ansehen und annehmen kann, daß seine Dichtigkeit noch nicht in solchen geringen Tiefen verändert werde, welche

Was-

Wassergebäude, Dämme, Deiche, Schleusen und Schiffe erreichen. Nach diesen vorausgesandten Erklärungen können wir die Theile der **mechanischen Wissenschaften** näher angeben. Diese sind: die **Mechanik**, welche von der Bewegung fester Körper handelt. Die **Statik** handelt vom Gleichgewicht fester Körper und deren Anwendung zu Maschinen. Die **Hydrostatik** beschäftigt sich mit unelastischen flüßigen Körpern oder dem Druck und Gleichgewicht des Wassers sowohl mit sich selbst als mit den auf demselben schwimmenden oder in selbiges versenkten festen Körpern. Die **Hydraulik** ist die Wissenschaft der Bewegung, des Stoßes und der Bewegungsgesetze unelastischer flüßiger Körper. Die **Aerometrie** oder **Aerostatik** handelt vom Gleichgewicht und Druck elastischer flüßiger Körper, vornämlich der Luft. Verschiedene andere Verfasser haben andere Namen gebraucht. **Herman** schrieb eine **Phoronomie**, (Amsterdam 1716 in 4.), worin er die Bewegung und Kräfte fester und flüßiger Körper abhandelt. **Leibnitz**, **D'alembert** (Paris 1743 in 4.) und mehrere gaben eine **Dynamik** heraus, worunter man die allgemeine Theorie der Kräfte versteht. **Daniel Bernoulli** (Strasburg 1738 in 4.) und **Bossut** (Paris 1786 2 B. in 8.) schrieben eine **Hydrodynamik**, eine Wissenschaft, unter welcher sie die Lehre von der Bewegung und den Kräften flüßiger Körper verstehen.

Diese Werke sind von Wichtigkeit, weil durch sie die Gränzen der Wissenschaften erweitert worden sind, obgleich es von minderer Wichtigkeit ist, wenn man bloß die Namen der Disciplinen verändert, und die **Statik** mit einem andern doch nicht völlig passenden Namen **Geostatik** und die eigentliche **Mechanik** mit dem Namen **Geodynamik** belegt, weil nicht allein die Erde und die festen Körper auf derselben, sondern auch die Planeten und Kometen eben denselben unveränderlichen Gesetzen der Bewegung und des Gleichgewichts folgen.

§. 7.

Die Erfahrung lehrt, daß das Licht, wenn es kein Hinderniß antrifft, und sich beständig in einer durchsichtigen Materie von gleicher Dichtigkeit bewegt, in einer geraden Linie fortgehet; daß es, wenn es auf undurchsichtige und polierte Körper oder Spiegel stößt, zurückgeworfen und endlich daß es, wenn es aus einer durchsichtigen Materie in eine andere von grösserer oder geringerer Dichtigkeit übergehet, gebrochen wird und seinen geraplinichten Weg verläßt. Hieraus ergiebt sich die **Eintheilung der optischen Wissenschaften.** Die **eigentliche Optik** handelt den Gang des Lichts und dessen Bewegung in einer durchsichtigen Materie ab, welche von gleicher Dichtigkeit ist. Die **Katoptrik** ist die Wissenschaft der Zurückwerfung oder Reflection des Lichts von Spiegeln, welche nach

Be-

Beschaffenheit ihrer Oberfläche ebene, sphärische, parabolische, cylindrische oder konische seyn können. Die **Dioptrik** ist die Wissenschaft von der Brechung oder Refraction der Lichtstrahlen, wenn sie aus der Luft in durchsichtiges Glas von sphärischer Figur fallen. Diese Wissenschaft handelt also von der Einrichtung und Berechnung der Fernröhre und Mikroskope. Die **Perspectiv** lehrt Objecte so auf eine Fläche zu zeichnen, wie sie das Auge in einer gegebenen Entfernung und Höhe sieht. Die Perspectiv ist also ein Theil der eigentlichen Optik.

§. 8.

Zu den **astronomischen Wissenschaften** gehören folgende Theile: Die **Astronomie** lehrt die Bewegung, Größe und Entfernung der Sterne, Planeten und Kometen zu berechnen. Die **mathematische Geographie** handelt von der Figur und Größe der Erde und der Lage der Oerter auf derselben. Die **Navigation** oder **Steuermannskunst** ist eine Anwendung der Astronomie und Geographie zum Gebrauch der Schiffahrt und zeigt, wie man das Schiff durch das Meer von einem Orte zum andern, dessen Lage oder Länge und Breite angegeben ist, zu führen hat. Die **mathematische Chronologie** lehrt die Abmessung der Zeit nach den Bewegungen der Himmelskörper in größern Zwischenräumen, Cykeln, Perioden

und

und Jahren. Die **Gnomonik** lehrt die Bestimmung der Stünden des Tages durch Sonnenuhren.

§. 9.

Die **technische Mathematik** hat folgende Theile: Die **bürgerliche Baukunst** erklärt die Einrichtung und Anlage von Gebäuden zum Bedürfniß des Lebens und zur Bequemlichkeit der bürgerlichen Gesellschaft. Die **Kriegsbaukunst** oder **Fortification** lehrt die Einrichtung, Aufführung und Errichtung solcher Anlagen oder Wälle, wodurch wenige sich gegen den Angriff vieler vertheidigen können. Da die Vertheidigungsanstalten nach der Art des Angriffs und der Waffen eingerichtet werden müssen und diese in unsern Tagen Gewehr, Kanonen, Mörser und Minen sind: so muß man vorher die Einrichtung dieser Waffen und die Wirkung des Pulvers kennen, und diese Wissenschaft nennt man die **Artillerie**. Die Fortification kann in die **permanente** und **Feld-Befestigungskunst** eingetheilt werden. Erstere lehrt Städte, Citadelle und Forts, deren Befestigungswerke von beständiger Dauer seyn sollen, zu befestigen, anzugreifen und zu vertheidigen. Letztere lehrt kleinere Wälle und Werke, welche nur eine kurze Zeit zur Vertheidigung oder Bedeckung eines Lagers, einer Brücke oder anderer gut belegenen und wichtigen Posten dienen sollen, anzulegen. Die **Schiffbaukunst** lehrt

Schiffe

Schiffe zu erbauen und vornämlich solche Figuren zu bilden, welche dem Schiffe nach seiner Absicht und Bestimmung die meisten möglichen guten Eigenschaften geben. Ein Schiff ist eine hydrostatische Maschine, so lange es ruhig auf dem Wasser liegt; aber eine hydraulische und aerometische Maschine, wenn es sich durch das Wasser bewegt, dessen Widerstand die wichtigsten Grundregeln für die Bildung der Schiffe bestimmt. Hierzu kann man noch die Regierung der Schiffe (la manoeuvre des vaisseaux) rechnen, welche die vortheilhafteste Einrichtung und Stellung des Steuerruders und der Segel lehrt, und also die Mechanik und Dynamik des segelnden Schiffes ausmacht.

§. 10.

Dies sind also die Theile der angewandten Mathematik nach der jetzigen Verfassung der menschlichen Kenntnisse. Mehrere werden mit der Zeit noch hinzukommen, wenn unsere Erkenntnisse von den Wirkungen und Begebenheiten der Natur die Höhe und Gewißheit erreichen, daß sie sich durch Maaß bestimmen und ausrechnen lassen. Nachdem Guericke die Luftpumpe, und Boile und andere die Wirkungen und Beschaffenheit der Luft durch Versuche bestimmt hatten, so stellte der Baron von Wolf (1706) die Lehre von der Luft in die Reihe der mathematischen Wissenschaften. Zwar schrieben Hoste,

Renau,

Renau, Bernoulli über die Eigenschaften der Schiffe, aber das Ganze war doch unvollständig. Zu gleicher Zeit arbeiteten zwey der berühmtesten Mathematiker in Europa in diesem schweren und fast noch unbekannten Fache. **Bouguer** arbeitete während seiner Aufmessung einiger Meridiangrade am Aequator seinen Traité du navire et de sa construction Paris 1746 aus, und **L. Euler** dachte beynahe unter dem Polarcirkel dieselbe Materie durch, und gab seine Scientia navalis 2 Tom. Petersburg 1749 heraus. Von der Zeit an erhielt die Schiffbaukunst zuerst eine wissenschaftliche Gestalt, und die Schiffe gewannen ansehnliche Verbesserungen durch eine richtige Verbindung der Theorie und Praxis. Die Wissenschaft vom Schall heißt die **Akustik**, und die Lehre vom Feuer die **Pyrometrie**. Obgleich man verschiedene Bücher unter diesem Titel hat, so verdienen sie doch noch nicht die Benennung mathematischer Disciplinen, weil unsere Kenntnisse von diesen Gegenständen noch nicht zu dem Grade von Gewißheit gelangt sind, daß wir den Schall, das Feuer und die Wärme messen können. **J. B. Reichter** gab eine **Stöchyometrie** (Breslau 1792, 2 Theile in 8vo.) heraus, welches eine Wissenschaft ist, die chemischen Elemente auszumessen und zu berechnen, und was bey deren Mischung in einem gegebenen Verhältniß zum Vorschein kommen wird.

Von

Von dieser neuen Wissenschaft läßt sich aber dasselbe sagen, was bey der Akustik und Pyrometrie erinnert ward.

§. 11.

Die Mathematik zeichnet sich durch die unumstößlichste Gewißheit und Zuverläßigkeit aus. Dies rührt theils von der Natur und Beschaffenheit der Gegenstände her, welche vor den Richterstuhl derselben gehören, theils von der mathematischen Lehrmethode (methodus mathematica). Man fängt mit deutlichen und vollständigen Begriffen der abzuhandelnden Dinge, oder mit **Erklärungen, Definitionen** an. Aus diesen leitet man so klare Folgen her, daß man von deren Richtigkeit überzeugt seyn muß, sobald man die Kunstwörter verstehet, welche in den Definitionen erklärt sind. Diese Sätze heissen **Grundsätze** oder **Axiome**, und sind theoretische, keines weitern Beweises bedürftige Sätze. Z. B. das Ganze ist so groß als alle Theile zusammengenommen, und größer als jeder dieser Theile. Wenn aber diese Sätze etwas practisches verlangen, so nennt man sie **Foderungen** oder **Postulate**, und sind practische Sätze, welche keinen Beweis erfodern. Z. B. mit einem gegebenen Radius einen Kreis zu beschreiben. Nun gehet man zu **Lehrsätzen** oder **Theoremen**, welches theoretische Sätze sind, die etwas lehren, das eines Beweises bedarf. Z. B. der

In-

Inhalt der Kugel ist $\frac{2}{3}$ des um dieselbe beschriebenen Cylinders. Jeder Lehrsatz besteht aus dem Satze selbst und dem Beweise, in welchem man aus unumstößlichen aus dem vorigen hergeleiteten Gründen, also aus Definitionen, Axiomen und den vorhin bewiesenen Lehrsätzen die Richtigkeit des Satzes darthut. **Aufgaben** oder **Probleme** sind practische Sätze, welche verlangen, daß etwas geschehen soll und einen Beweis verlangen. Z. B. den Stoß des Wassers auf eine gegebene Fläche zu berechnen, wenn es sich mit einer gegebenen Geschwindigkeit und unter einem gegebenen Winkel bewegt. Bey einer Aufgabe kommt dreyerley vor: der Satz, welcher angibt, was verlangt wird, oder geschehen soll; die Auflösung oder Resolution, wie es geschieht, oder was man thun muß, um das Verlangte zu erhalten, und endlich der Beweis, um darzuthun, daß wenn man diesen Regeln folgt, man seine Absicht erreiche. Unter **Folgesätzen** oder **Zusätzen** (Corollaria seu Consectaria) versteht man solche Sätze, welche aus bereits erwiesenen Lehrsätzen oder aufgelöseten Aufgaben unmittelbar folgen. Wenn bewiesen worden ist, daß die drey Winkel in einem Dreyeck so groß als zwey rechte sind: so lassen sich daraus zwey Folgesätze herleiten: 1) kein Dreyeck kann mehr als Einen rechten Winkel haben; 2) eben so wenig kann in demselben mehr als Ein stumpfer Winkel seyn. **Anmerkungen** (Scholia) sind Sätze,

welche

welche einem der vorigen Sätze angehängt werden, und historische Bemerkungen, literärische Nachrichten, practische Auflösungen, oder was man sonst zu erinnern nöthig findet, enthalten. **Willkührliche Sätze** (Hypotheses) enthalten etwas, das willkührlich ist und anders seyn könnte, als man es angenommen hat. Von der Art sind angenommene Zeichen und Ausdrücke, eingeführte Eintheilungen z. B. des Kreises in 360 Grade oder des Fusses in 12 Zolle.

## §. 12.

Mehr Arten von Sätzen braucht man in der reinen Mathematik nicht. Aber in der angewandten Mathematik, wo man die Wirkungen der Natur erklären und berechnen soll, muß man noch Newtons richtiger Vorschrift von solchen unzweifelhaften Grundsätzen ausgehen, welchen die Natur selbst in ihren Handlungen folgt, und diese kann allein eine sorgfältige und genaue Erfahrung uns lehren. **Erfahrungen** (experientiae) und **Beobachtungen** (observationes) sind Sätze, welche aus der Untersuchung der Gesetze und Wirkungen der Natur, wenn sie sich selbst überlassen ist, hergeleitet werden. So ist es eine Erfahrung, daß ein schwerer Körper in Einer Sekunde durch einen Raum von $15\frac{1}{2}$ Fuß fällt. So ist es eine Erfahrung, daß das Licht gebrochen wird, wenn es aus einer dünnern Materie in eine dichtere

übergehet. Das Wort Observationen gebraucht man in einer mehr eingeschränkten Bedeutung von Bemerkungen solcher Begebenheiten, welche man an den Himmelskörpern sieht und bemerkt. Versuche (experimenta) sind aus der Erfahrung abgeleitete Sätze, welche entstehen, wenn durch künstliche Instrumente die Natur in die Nothwendigkeit gesetzt wird, sich auf eine andere Weise zu äußern und zu wirken, als sie sich selbst überlassen gethan haben würde. So war es ein sehr wichtiger Versuch, als Newton den Sonnenstrahl durch ein prismatisches Glas fallen ließ und dadurch entdeckte, daß sich derselbe in die sieben Farben des Regenbogens zerlegen läßt. Es ist ein Versuch, wenn man das Barometer unter die Glocke der Luftpumpe bringt und dadurch zeigt, daß wenn man die Luft gänzlich herauspumpt, das Queckſilber in der Barometerröhre gänzlich herabfällt und daraus schließt, daß es der Druck der Luft ist, der es bewirkt, daß das Queckſilber 28 Zoll hoch steht. Da die ganze Natur einer Kette gleicht, in der ein Glied mit dem andern zusammenhängt, so kann man in der angewandten Mathematik ohne Gefahr die Lehrsätze und Aufgaben, die Erklärung und Bestimmung der Naturbegebenheiten auf solche sichere und zuverläßige Erfahrungen und Versuche bauen, und diese bleiben immer der richtige und wahre Probierstein der Richtigkeit aller Theorien, wenn diese bloß a priori auf die angenommene

Natur

Natur und Beschaffenheit der Sache gegründet und bewiesen sind.

§. 13.

Alle alte und verschiedene der neuen Mathematiker befolgten diese mathematische Lehrmethode so streng, daß sie über jeden Satz seinen gehörigen Namen Definition, Axiom, Theorem, Problem u. s. w. setzten, und das ist eben kein Fehler zu nennen. Indessen kann man diesen mathematischen Schmuck und äußere Titulatur gerne weglassen, wenn man nur genau den Grundregeln der mathematischen Lehrmethode folge, keinen Satz annimmt und gebraucht, der nicht vorher deutlich erklärt und aus den im vorhergehenden gelegten Gründen unumstößlich erwiesen ist. Diese Lehrmethode ist also in der Hauptsache dieselbe, als die philosophische oder die wahre Methode der Vernunft, welche jeder befolgen muß, der in der Erforschung der Wahrheit deutlich, ordentlich und gründlich denken und auf diesem unsicheren Wege gewissen und festen Schrittes fortwandeln will.

§. 14.

Wegen der Beschaffenheit der Mathematik, wegen der Einrichtung und Form ihrer Lehrmethode und wegen der überzeugenden Gewißheit der mathematischen Wahrheiten gibt es keine Wissenschaft, welche mehr die Urtheilskraft schärft und besser den Verstand

im Denken übt, als die Mathematik. Plato schrieb über die Thür seines Hörsaals: Kein Unkundiger in der Geometrie komme herein und wollte nicht, daß jemand seinen abstracten philosophischen Vorlesungen beywohnen sollte, wenn er nicht vorher durch das Studium der Geometrie zum richtigen Denken und Schließen war angeleitet worden. So dachte dieser berühmte Lehrer des Alterthums und so denken noch die verständigsten und scharfsinnigsten Nationen, in deren Schulen die Geometrie mit vielem Fleiße gelehrt wird. Die Mathematik ist nicht allein nützlich zur Schärfung des Verstandes, sie ist sogar unentbehrlich bey vielen Einrichtungen und gewährt der bürgerlichen Gesellschaft unendlich viele Vortheile. Die Geometrie lehrt Karten verfertigen, Gemeinheiten aufheben, Ländereyen eintheilen. Durch die Mechanik sind unzählige Maschinen erdacht worden, durch welche viele Arten von Arbeiten mit größerer Geschwindigkeit, größerer Genauigkeit und für einen wohlfeilern Preis verrichtet werden, als es durch Menschenhände geschehen könnte. Man besehe nur einmal eine Baumwollenspinnerey, wo die Baumwolle durch Maschinen gesponnen wird; man besehe nur einmal den aus diesem Garn gewebten Zeug und stelle eine Vergleichung zwischen der Güte, Feinheit und dem Preise dieses und durch bloße Handarbeit bereiteten Zeuges an und man wird sich von der Wichtigkeit und dem Nutzen

des Maschinenwesens überzeugen. Nach den Regeln der Hydraulik werden Seen abgeleitet, Deiche angelegt, und Kanäle, Häfen, Docken und Schiffe erbauet. Durch Fernröhre und Mikroskope betrachten wir die Natur näher und genauer, als es das unbewaffnete Auge vermag, und man hat durch diese Instrumente, welche unser Zeitalter zu einem so hohen Grad der Vollkommenheit gebracht hat, viele Merkwürdigkeiten am Himmel und auf der Erde entdeckt. Die Astronomie und Geographie liefern uns richtige General-Karten über Länder und Meere; durch Hülfe seiner verbesserten Tafeln segelt der Schiffer durch das Meer zum Bestimmungshafen und ganze Staaten bereichern sich durch die weit größere Sicherheit der Seefahrt und des Handels, als vor 50 Jahren. Die astronomischen Wissenschaften flößen uns überdieß die erhabensten und edelsten Begriffe von der unendlichen Macht und Weisheit des Schöpfers ein. Durch die bürgerliche Baukunst sind unsere Häuser dauerhaft, und nach ihrer verschiedenen Absicht und Gebrauch bequem eingerichtet. Die Kriegswissenschaften, Artillerie, Fortification und Tactik gründen sich gänzlich auf die Mathematik, und sich mit Eifer auf diese zu legen, muß jetzt eine Ehre und ein Bedürfniß des bessern Theils junger Offiziere seyn.

## §. 15.

Die **Naturlehre** oder **Physik** handelt von den Begebenheiten und Wirkungen der Natur; die angewandte Mathematik beschäftige sich aber gleichfalls mit Naturbegebenheiten — worin besteht also der Unterschied zwischen diesen beyden Wissenschaften und wie soll man ihre Gränzlinie ziehen? Die Naturlehre wird heut zu Tage in drey Hauptabtheilungen zerlegt: 1) die mathematische, welche von den allgemeinen Eigenschaften der Körper und den Bewegungsgesetzen sowohl fester als flüßiger Körper, der Luft und dem Lichte handelt; 2) die chemische, die Lehre von der Wärme, dem Feuer, den Grundstoffen der Körper, Zusammensetzungen und Auflösungen und Luftarten; 3) die Lehre von der Electricität, dem Magnetismus und den Meteoren. Daß der mathematische Theil der Physik gänzlich aus der angewandten Mathematik entlehnt sey, ist von selbst klar, so wie der andere Theil der Chemie angehört. Nimmt man die physikalischen Werke der besten Verfasser bis ungefähr zum Jahre 1770 zur Hand, z. B. von **Gravesand, Musschenbroek, Nollet, Sigaud de la Fond, Krüger, Segner, Eberhard**: so wird man finden, daß diese zu ihrer Zeit vortreflichen Lehrbücher fast nichts als angewandte Mathematik enthalten. Die neuen Entdeckungen eines **Priestley, Bergmann, Scheele, Lavoisier** und anderer haben wenigstens

wigſtens die erſten Gründe der Chymie für die Naturlehre nothwendig gemacht, und man findet dieſe auch in den Lehrbüchern von Erxleben nach Lichtenbergs Ausgaben, von Green, Nicolſon und andern; das hingegen iſt der mathematiſche Theil deſto mehr abgekürzet worden, welchen man jetzt nur auf eine populäre Weiſe vorträgt und die Sätze bloß durch Experimente beweiſet. Aber demnach wird einige Kenntniß der reinen Mathematik erfodert, wenn man dieſe Begriffe und Sätze der Naturlehre vollkommen verſtehen und richtig anwenden will. Phyſik und Mathematik haben alſo vieles gemeinſchaftlich, und eins wird durch das andere erläutert, erklärt und berichtigt; dieſe Wiſſenſchaften ſind alſo auf das innigſte verbunden und niemand wird in dem einen groſſe Fortſchritte machen, wenn er von allen Kenntniſſen des andern entblößt iſt. Eigentlich bedarf es keiner Gränzlinie zwiſchen dieſen beyden ſo nahe verwandten Wiſſenſchaften. Will man aber doch alle Gemeinſchaft zwiſchen denſelben aufgehoben wiſſen, ſo kommt es der Naturlehre zu, die Urſachen der Naturgeſetze und Naturbegebenheiten, z. B. der Schwere, Bewegung, des Lichts, der Electricität, des Magnetismus u. ſ. w. anzugeben und zu erklären; das Geſchäft der Mathematik aber iſt es dieſe, ſo weit es ihr möglich iſt, auszumeſſen und zu berechnen, und wer weiß, ob wir nicht mit der Zeit eine Electrometrie, Magnetometrie u. ſ. w. erhalten.

So viel ist unzweifelhaft und gewiß, daß die Naturwissenschaften, die Chemie, Physik und Mathematik, solche Wissenschaften sind, durch welche eine Nation ihren Ackerbau, ihre Manufacturen, ihre Schiffahrt und Handlung zu einem hohen Grad der Vollkommenheit bringen und in diesen Zweigen der Industrie mit andern Nationen wetteifern kann. Alle sind gleich wichtig und nützlich und nur der Unwissende verachtet eine oder die andere, oder möchte gerne eine auf Kosten der andern erheben und ausbreiten.

# Die Arithmetik.

## Erstes Kapitel.

### Allgemeine Gründe der Arithmetik.

§. 1.

Die Arithmetik ist die Wissenschaft von den Eigenschaften und Vergleichungen der Zahlen. Die theoretische Arithmetik erklärt die Natur der Zahlen; die practische Arithmetik oder Rechenkunst lehrt aus mehrern gegebenen Zahlen eine andere finden, deren Verhältniß oder Vergleichung mit den bekannten gegeben ist.

§. 2.

Jede Größe, welche man als eine ganze und ungetheilte Größe betrachtet, heißt eine Einheit oder Unität. Eine ganze Zahl ist eine Menge von mehrern Einheiten einerley Art oder gleicher Beschaffenheit. Eine bestimmte oder benannte Zahl ist diejenige, bey der die Art der Einheit bestimmt ist. Die Einheit kann eine Elle, ein Reichsthaler u. s. w. seyn, z. B. 6 Ellen, 100 Reichsthaler. Eine unbestimmte oder unbenannte Zahl heißt eine solche, bey der die Art der Einheit unbestimmt ist; z. B.

man nennt die Zahl 8, ohne anzugeben, ob es eine Menge von Reichsthalern, Ellen, Meilen u. s. w. und ob die Einheit ein Reichsthaler, Elle, Meile u. s. w. ist. Außer der gewöhnlichen Art die Zahlen mit den bekannten Zahlzeichen 1, 2, 3, 4 u. s. w. zu bezeichnen, kann man auch im allgemeinen Zahlen und andere Größen mit Buchstaben des Alphabets ausdrücken, z. B. a, b, c u. s. w.

§. 3.

**Zahlen addiren** heißt ihre Einheiten zusammen zählen. **Eine Zahl von der andern subtrahiren**, heißt von den Einheiten der einen Zahl die Einheiten der andern Zahl abnehmen. **Eine Zahl mit einer andern multipliciren**, heißt die eine Zahl so oft zu sich selbst legen, als Einheiten in der andern Zahl sind. **Eine Zahl durch eine andere dividiren**, heißt von der einen Zahl die andere so oft abnehmen, als es angehet.

§. 4.

**Gleich große** oder **gleiche Größen** sind die, welche gleiche viele Theile haben und in Hinsicht ihrer Größe eine für die andere gesetzt werden können, ohne daß hieraus eine Veränderung entsteht. So ist Ein Reichsthaler gleich 48 ßß; 2 Ellen gleich 48 Zoll u. s. w. **Eine Größe a ist größer als eine andere b**, wenn diese ein Theil von jener ist und dann

dann heißt b kleiner als a. Z. B. 5 Zoll ist nur ein Theil von 24 Zoll oder einer Elle und diese ist größer als 5 Zoll.

§ 5.

Um bey den Beweisen der Sätze und beym Rechnen sich mit desto mehr Kürze ausdrücken zu können, hat man folgende Zeichen zur Bezeichnung der vorigen Begriffe und Erklärungen eingeführt.

Das Gleichheitszeichen =;

1 Rthlr. = 48 ßß; 1 Rthlr. gleich 48 ßß.

Das Zeichen des Größern >;

8 ßß > 6 ßß; 8 ßß mehr als 6 ßß.

Das Zeichen des Kleinern <;

4 Ellen < 6 Ellen; 4 Ellen weniger als 6 Ellen.

Das Additionszeichen +;

8 + 2; 8 und 2.

Das Subtractionszeichen —;

6 — 2; 6 weniger 2.

Das Multiplicationszeichen . oder ×;

6 . 8;

6 × 8; 6mal 8, oder 6 multipl. mit 8.

Das Divisionszeichen :; oder wie ein Bruch $\frac{a}{b}$;

12 : 2; 12 durch 2 dividirt.

$\frac{8}{4}$; 8 dividirt durch 4.

Wenn man anzeigen will, daß mehrere mit + und — verbundene Zahlen mit andern multiplicirt werden sollen,

sollen, so müssen sie in Klammern eingeschlossen werden. Z. B. $(8 + 4) \cdot 12$ bedeutet, daß 8 und 4 also 12 mit 12 multiplicirt werden soll. $(a + b) \cdot (c - d)$ bedeutet, daß a und b zusammen genommen mit c weniger d multiplicirt werden soll. $(8 + 4) \cdot (6 - 3)$ zeigt an, daß 8 und 4 also 12 mit $6 - 3$ also 3 oder 12 mit 3 multiplicirt werden soll, welches 36 macht.

## §. 6.

Auf folgende Axiome oder allgemeine Grundsätze gründen sich beynahe alle Schlüsse in der Mathematik.

1) Das Ganze ist so groß als alle Theile zusammen genommen und also größer als Ein Theil. Z. B. Ein Fuß $=$ 12 Zoll, 5 Reichsthaler mehr als 3 Reichsthaler. Wenn $a = b + c$ so ist $a > b$ und $a > c$.

2) Jede Größe ist sich selbst gleich. 2 Reichsthaler $=$ 2 Reichsthaler; $a = a$; $b = b$.

3) Wenn zwey Größen einer dritten gleich sind, so sind sie unter sich gleich. Z. B.

$$\begin{array}{r} 8 = 3 + 5 \\ 8 = 10 - 2 \\ \hline 3 + 5 = 10 - 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a = b \\ b = c \\ \hline a = c. \end{array}$$

4)

4) Wenn gleiche Größen auf gleiche Art gleich viel vermehrt oder vermindert werden, so ist das, was herauskommt, gleich.

| Addition | Multiplication |
|---|---|
| $6 = 4 + 2$ | $8 = 12 - 4$ |
| $3 = 3$ | $6 = 6$ |
| $9 = 7 + 2$ | $6.8 = 12.6 - 4.6$ |

| Subtraction | Division |
|---|---|
| $18 = 10 + 8$ | $12 = 8 + 4$ |
| $5 = 3 + 2$ | $2 = 2$ |
| $13 = 7 + 6$ | $\frac{12}{2} = \frac{8}{2} + \frac{4}{2}$ d. h. $6 = 4 + 2$ |

5) Wenn gleiche Größen auf ungleiche Art behandelt werden, so ist das, was herauskommt, ungleich. Dieses geschieht auch, wenn ungleiche Größen auf gleiche Art behandelt werden.

| Addition | Multiplication |
|---|---|
| $6 + 4 = 10$ | $4 + 5 > 5$ |
| $3 > 1$ | $4 = 4$ |
| $6 + 7 > 11.$ | $4.4 + 5.4 > 5.4$ d. h. $16 + 20 > 20$ |

| Subtraction | Division |
|---|---|
| $8 < 6 + 5$ | $10 + 4 = 14$ |
| $4 = 4$ | $2 < 7$ |
| $4 < 2 + 5$ | $\frac{10}{2} + \frac{4}{2} > \frac{14}{7}$ d. h. $5 + 2 > 2$ |

6)

6) Eine Größe, welche größer oder kleiner als eine von zwey gleichen Größen iſt, iſt auch größer oder kleiner als die andere.

1 Reichsthaler = 48 ß
100 ß > 48 ß
100 ß > 1 Reichsthaler.

## Zweytes Kapitel.

### Von den Zeichen der Zahlen und dem Numeriren.

§. 7.

Man gehe in Zählung der Einheiten nicht weiter als bis zehn: eins, zwey, drey, vier, fünf, ſechs, ſieben, acht, neun, zehn. Wenn man bis zehn gezählt hat, ſo zähle man die Einheiten hinzu: zehn und eins machen eilf; zehn und zwey ſind zwölf; zehn und drey ſind dreyzehn; zehn und vier machen vierzehn; zehn und fünf machen funfzehn; zehn und ſieben machen ſiebenzehn; zehn und acht ſind achtzehn; zehn und zehn oder zweymal zehn machen zwanzig. Dreymal zehn machen dreyßig; viermal zehn vierzig; fünfmal zehn funfzig; ſechsmal zehn machen ſechszig; ſiebenmal zehn machen ſiebenzig; achtmal zehn machen achtzig; neunmal zehn machen neunzig; zehnmal

zehn

zehn machen **Hundert**. Zehnmal Hundert sind **Tausend**; hundertmal Tausend sind **Hunderttausend**; tausendmal Tausend machen eine **Million**; eine Million mal eine Million machen eine **Billion**; eine Million mal eine Billion machen eine **Trillion**; eine Million mal eine Trillion eine **Quadrillion** u. s. w.

## §. 8.

Zur Bezeichnung dieser und anderer Zahlen gebraucht man folgende Zeichen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Null | 0 | fünf | 5 |
| eins | 1 | sechs | 6 |
| zwey | 2 | sieben | 7 |
| drey | 3 | acht | 8 |
| vier | 4 | neun | 9 |

Diese Zeichen verändern ihren Werth nach der Stelle, in der sie stehen. Wenn sie von der rechten Hand angerechnet in der ersten Stelle oder Klasse stehen, so bedeuten sie **Einer**; in der zweyten **Zehner**; in der dritten **Hunderte**; in der vierten **Tausende**; in der fünften **Zehntausende** u. s. w. Wenn keine Einer, Zehner, Hunderte u. s. w. vorhanden sind, so wird die ledige Stelle mit Nullen angefüllt, damit die vorherstehenden Zahlzeichen nicht ihren Werth oder ihre Bedeutung verlieren. Hieraus folgt, daß

Zehn geſchrieben werden muß . . . . . 10.
Ein Hundert . . . . . 100.
Ein Tauſend . . . . . 1000.
Zehn Tauſend . . . . . 10000.
Hundert Tauſend . . . . . 100000.
Eine Million . . . . . 1000000.
Eine Billion . . . . . 1000000000000.
Eine Trillion . . . . 1000000000000000000.

§. 9.

**Eine gegebene Zahl auszuſprechen.** Wenn man von hinten anfängt und (gegen unſere gewöhnliche Art zu leſen und zu ſchreiben) die Zahlen zur rechten Hand zuerſt lieſet und ſo zur linken Seite fortgehet, ſo iſt die Ausſprechung einer Zahl leicht. Z. B. 3658 ſind 8 Einer, 5 Zehner, 6 Hunderte, 3 Tauſende, weil $3658 = 8 + 50 + 600 + 3000$ iſt. (§. 7 und 8). Wenn man nach unſerer gewöhnlichen Leſemethode von der linken Seite anfängt, ſo kann man dieſen Regeln folgen: 1) die Zahlen werden in Klaſſen abgetheilt, ſo daß jede Klaſſe 3 Zahlen erhält, wobey man von der rechten zur linken Seite abtheilt, und jede Klaſſe durch ein Komma bezeichnet; 2) über das zweyte Komma ſetzet man Einen Punct, und alles, was vor dieſem zweyten Komma ſtehet, bedeutet Millionen; über das vierte Komma ſetzet man zwey Puncte, und alles, was vor dieſem vierten Komma vorhergehet, bedeutet Billionen u. ſ. w. 3)

Jede

Jede Zahl in jeder Klasse spricht man nach dem Werth aus, welcher ihr nach ihrer Stelle, von der rechten Hand angerechnet, zukommt (§. 7. 8). Z. B.

6; 832,409

wird ausgesprochen 6 Millionen, 8 Hundert, 32 Tausend, 4 Hundert und 9.

8,923; 456,342; 972,645

ist 8 Tausend, 9 Hundert, 23 Billionen, 4 Hundert, 56 Tausend, 3 Hundert 42 Millionen, 9 Hundert, 72 Tausend, 6 Hundert und 45.

Anmerk. Daß die Charaktere, mit welchen wir unsere Zahlen bezeichnen, orientalischen Ursprungs sind, ersieht man daraus, daß das Zählen und Schreiben der Zahlen von der rechten zur linken Hand nach der Weise der Morgenländer geschieht, der auch die Perser Mongolen, Tartaren und Chinesen folgen. Vermuthlich sind sie von den Indianern erfunden, und von ihnen zu den Arabern und Sarazenen gekommen, von welchen nachher ungefähr im 9ten Jahrhundert die Europäer sie erhalten haben. (Wallisii opera mathem. Tom. II. p. 16.). Die Methode bis zehn zu zählen oder das decadische System hat ohne Zweifel in der Gewohnheit roher Menschen an den Fingern zu zählen seinen Ursprung. Dennoch aber gibt es

auch andere Arten zu zählen z. B. Weigels Tetractik, wo nur bis vier gezählt wird, (Weigelii Philoſ. mathem. p. 175) und Leibnitzens Dyadik, wo man nur bis zwey zählt und nur zwey Charaktere 1 und 0 zur Bezeichnung aller Zahlen gebraucht. (Memoires de l'academie des ſciences de Paris 1705. p. 105 und Leibnitii opera omnia Tom. 3. Genevae 1768 p. 346—355). Die Juden, Griechen und Römer gebrauchten Buchſtaben zur Bezeichnung der Zahlen, und es war ihnen ſchwer große Zahlen zu ſchreiben und auszuſprechen. Archimedes erfand zu der Abſicht eine ſehr ſinnreiche Methode und lehrte ſo hohe Zahlen zu benennen, als noch niemand vor ihm hatte ausdrücken können. Er wandte dieſelbe auf die Berechnung und Zählung der Sandkörner an, welche nach den damaligen aſtronomiſchen Ausmeſſungen zwiſchen der Erde und der Sphäre der Fixſterne Raum hätten, und nannte ſein Werk Arenarius, welches man in Walliſii opera mathem. Vol. III. p. 513—538 Oxford. 1699 findet.

# Drittes Kapitel.

## Die vier Rechnungsarten oder Species in ganzen Zahlen.

§. 10.

**Addiren** heißt zwey oder mehrere Zahlen zusammenlegen und Eine Zahl daraus machen. Die Zahlen, welche zusammengezählt werden, können als einzelne Theile angesehen werden, und heißen die **summirten Zahlen.** Die gefundene Zahl läßt sich als ein Ganzes betrachten und heißt die **Summe** oder das **Aggregat.** Man **addirt** also, wenn man aus zwey oder mehrern gegebenen Zahlen eine Zahl findet, welche so groß ist, als die gegebenen zusammen. (§ 6. Grundſ. 1)

§. 11.

### Mehrere unbenannte Zahlen zu addiren.

1) Man schreibe die gegebenen Zahlen unter einander, Einer unter Einer, Zehner unter Zehner u. s. w. und ziehe eine Linie darunter.

2) Man zähle die Zehner, Hunderte u. s. w. jede für sich allein zusammen, und schreibe die Summe gerade darunter in die derselben zukommende Klasse.

3) Hiebey bemerke man, daß wenn die Summe jeder Klasse z. B. der Einer zehn übersteigt, die

Einer in ihre Klasse gesetzt, die Zehner aber im Sinne (in mente) behalten oder in die Klasse der Zehner geschrieben und da mitgerechnet werden. Auf dieselbe Weise verfährt man bey den Hunderten, Tausenden u. s. w.

| Erstes | Zweytes | Drittes Exempel |
|---|---|---|
| 2495 | 234 | 3389 |
| 1203 | 561 | 2741 |
| | 975 | 6134 |
| 3698 | 240 | |
| | | 12264 |
| | 2010 | |

**Beweis.** Die gefundene Zahl enthält alle Einer, Zehner, Hunderte u. s. w. der gegebenen Zahlen d. h. alle Theile der gegebenen Zahlen. Sie ist also eben so groß als die gegebenen Zahlen (§. 6. Grundsatz 1) und also die Summe der gegebenen Zahlen. (§. 10.)

In dem dritten Exempel ist

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3389 | = | 3000 | + | 300 | + | 80 | + | 9 |
| 2741 | = | 2000 | + | 700 | + | 40 | + | 1 |
| 6134 | = | 6000 | + | 100 | + | 30 | + | 4 |
| 12264 | = | 11000 | + | 1100 | + | 150 | + | 14 |

## §. 12.

**Subtrahiren** heißt von einer gegebenen Zahl eine andere abnehmen. Die gegebene Zahl muß größer seyn als die andere und kann als ein Ganzes angesehen werden. Die abzuziehende Zahl wird als ein Theil

und

und die gefundene Zahl als der andere Theil betrachtet. **Subtrahiren** heißt also aus zwey gegebenen Zahlen, einer größern und einer kleinern, eine dritte Zahl finden, welche nebst der gegebenen kleinern Zahl so groß ist als die gegebene größere. (§. 6. Grundſ. 1.). Die durch die **Subtraction** gefundene Zahl heißt die **Differenz** oder der **Unterſchied**.

## §. 13.

### Von einer gegebenen größern Zahl eine gegebene kleinere abzuziehen.

1) Unter die gegebene größere Zahl ſchreibe man die gegebene kleinere: Einer unter Einer, Zehner unter Zehner u. ſ. w.

2) Von den Einern ziehe man die Einer, von den Zehnern die Zehner u. ſ. w. ab und ſchreibe jeden Unterſchied in ſeine gehörige Klaſſe.

3) Wenn eine Zahl in der untern Reihe größer iſt als die dazu gehörige Zahl in der obern Reihe und also nicht von derſelben abgezogen werden kann: ſo leihet man eine Einheit von der vorhergehenden Zahl, welches man durch einen Punct andeutet. Das Geliehene legt man zu der kleinen Zahl, welche dadurch um zehn größer wird; aber diejenige Zahl, von der man geliehen hat, iſt dadurch um eine Einheit kleiner geworden, welches man wohl bemerken muß, wenn man bey der Subtraction zu dieſer Zahl kommt.

4) Findet man in der Stelle, wo man leihen muß, o, so muß man aus der Klasse vor o leihen, wodurch der Werth von o zehn wird, wovon Eine Einheit geliehen werden und die Subtraction von 9 geschehen muß.

5) Sollte man zwey oder mehr Nullen vorfinden, so leihet man auf eben die Art durch die ganze Reihe der Nullen durch.

| Zweyte Regel. | Dritte und vierte Regel. | Fünfte Regel. |
|---|---|---|
| 89523 | 808 | 7.0.0.0.6 |
| 23311 | 466 | 32598 |
| 66212 | 342 | 37408 |

**Beweis.** Die nach diesen Regeln gefundenen Zahlen enthalten den Unterschied aller Einer, Zehner, Hunderte u. s. w. und also den Unterschied der gegebenen Zahlen. (§. 12). Nämlich in dem zweyten Beyspiel ist:

$$\begin{aligned} 808 &= 700 + 100 + 8 \\ 466 &= 400 + 60 + 6 \\ \hline & 300 + 40 + 2 \end{aligned}$$

Man ersieht hieraus, daß man die Richtigkeit der Subtraction dadurch prüfen kann, daß man die Differenz zu der subtrahirten oder kleinen Zahl addiret, wo dann die größere Zahl, von der die Subtraction geschehen ist, herauskommen muß. (§. 6. 12). So ist $342 + 466 = 808$.

§. 14.

§. 14.

**Eine gegebene Zahl mit einer andern multipliciren** heißt die erste so oft zu sich selbst legen, als Einheiten in der andern sind. Z. B. 6. 4 = 6 + 6 + 6 + 6 = 24; 23. 3 = 23 + 23 + 23 = 69. Die Zahl, welche multiplicirt oder zu sich selbst gelegt wird, heißt der **Multiplicandus**; z. B. 6 und 23. Die multiplicirende Zahl, welche anzeigt, wie oft die andere Zahl zu sich selbst gelegt werden soll, wird der **Multiplicator** genannt; z. B. 4 und 3; beyde heißen die **Factoren**. Die durch die Multiplication gefundene Zahl heißt das **Product** oder **Factum**; z. B. 24 und 69 sind die Producte.

§. 15.

Aus dieser Erklärung erhellet, daß der Multiplicandus so oft zu sich selbst gelegt werden muß als Einheiten im Multiplicator sind, oder daß das Product auf eben die Weise aus dem Multiplicandus entstehe wie der Multiplicator aus der Einheit oder wie sich die Einheit zum Multiplicator verhält so verhält sich der Multiplicandus zum Product.

§. 16.

Hieraus folgt:

1) daß jede Größe mit o multiplicirt o ist; z. B. 6. o = o. Denn eben so wie aus der Einheit 1 kein Multiplicator o entstehen kann, ohne der Einheit ihre wirkliche Größe zu neh-

men, so kann auch aus dem Multiplicandus 6 kein Product 6. 0 entstehen, ohne der Zahl 6 alle wirkliche Größe zu nehmen und wenn 6 keine wirkliche Größe hat, so ist $6 = 0$.

2) **Wenn eine gegebene Zahl mit 1 multiplicirt wird, so bleibt sie unveränderlich;** z. B. 12. 1 = 12. Denn eben so wie aus der Einheit 1 der Multiplicator 1 entsteht, wenn man die erste unverändert läßt, so muß auch das Product 12. 1 entstehen, wenn der Multiplicandus unverändert bleibt. Also 12. 1 = 12.

§. 17.

Die **Pytagorische Tafel** oder **Multiplications-Tafel** oder das **Einmal Eins** enthält die Producte aller Zahlen von 1 bis 9 und ist auf folgende Weise eingerichtet.

M

| A | | | | | | | | | | B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
| | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | |
| | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | |
| | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | |
| | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | |
| | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 | |
| O | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 | P |
| | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 | |
| C | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 | |

N

Man

Man schreibe in eine horizontale Reihe A B alle Zahlen von 1 bis 9 und ebenfalls in eine senkrechte Reihe A C nach unten. In jeder verticalen Reihe addire man die Zahlen zu sich selbst und nachher zu den gefundenen Summen, und schreibe das, was herauskommt, in die verticale Reihe; z. B. M N; wo 5 + 5 = 2. 5 = 10; 10 + 5 = 3. 5 = 15; 15 + 5 = 4. 5 = 20; 20 + 5 = 5. 5 = 25; 25 + 5 = 6. 5 = 30 u. s. w. So findet man alle Producte bloß durch die Addition. Will man nun das Product zweyer Zahlen z. B. 7 und 5 wissen, so geht man in der Verticalreihe M N herunter und in der Horizontalreihe 7 nach O P fort, bis man in die Reihe M N kommt, wo 35 = 7. 5 gefunden wird.

## §. 18.

## Eine gegebene Zahl mit einer andern zu multipliciren.

1) Wenn der Multiplicator aus Einheiten besteht, so multiplicirt man ihn zuerst mit den Einheiten, dann mit den Zehnern, darauf mit den Hunderten u. s. w. des Multiplicandus. Das Product der Einheiten schreibt man unter die Einheiten, der Zehner unter die Zehner, der Hunderte unter die Hunderte u. s. w. Wenn aber das Product des Multiplicators in irgend einer Klasse zehn überschreitet oder auch zehn ist, so behält

man den Zehner im Gedächtniß (in mente) und legt ihn zum Product der folgenden Klasse. Wenn eine Zahl mit einem Zehner, Hunderter oder Tausender u. s. w. multiplicirt wird, so fügt man eine, zwey oder drey u. s. w. Nullen hinzu, wie im dritten Beyspiel.

| Erstes | Zweytes | Drittes Beyspiel |
|---|---|---|
| 4528 | 2004 | 682 |
| 3 | 6 | 900 |
| 13584 | 12024 | 613800 |

**Beweis.** In dem ersten Beyspiel ist

$$4528 = 4000 + 500 + 20 + 8$$
$$3 = \qquad\qquad\qquad 3$$

$$13584 = 12000 + 1500 + 60 + 24 = 4528.3.$$

Die gefundene Zahl ist also das Product der Einer, Zehner, Hunderte u. s. w. der gegebenen Zahl, (§. 17.) also aller Theile derselben (§. 8. 9) und folglich das Product der ganzen gegebenen Zahl.

2) Wenn sowohl der Multiplicator als der Multiplicandus aus mehrern Zahlen besteht, so wird der Multiplicandus zuerst mit den Einern, dann mit den Zehnern, Hunderten u. s. w. des Multiplicators multiplicirt. Das Product des Zehners des Multiplicators in den Multiplicandus wird um eine Zahl weiter gegen die linke Hand gerückt

gerückt u. s. w. Hat der Multiplicator in der Mitte Nullen, so wird die folgende Reihe des Products so viele Zahlen weiter vor gegen die linke Hand zu gerückt als Nullen da sind. Zuletzt addirt man diese einzelnen Producte.

| Erstes Beyspiel. | Zweytes Beyspiel. |
|---|---|
| 2482 | 58472 |
| 215 | 2034 |
| 12410 | 233888 |
| 2482 | 175416 |
| 4964 | 116944 |
| 533630 | 118932048 |

**Beweis.** Die Zahl 2482 mit 215 multiplicirten heißt 2482 mit (200 + 10 + 5) oder mit den Einern, Zehnern, Hunderten u. s. w. des Multiplicators zu multipliciren. Also:

2482 = 2 4 82
225 = 5 + 10 + 200

12410 = 2482.5
24820 = 2482.10
496400 = 2482.200

533630 = 2482.(5 + 10 + 206) = 2482.225.

Hieraus ersieht man zugleich, warum das Product aus den Zehnern eine Stelle vorwärts gegen die linke Hand gerückt wird u. s. w.

§. 19.

§. 19.

**Eine Zahl durch eine andere dividiren** heißt finden, wie oft die eine in der andern enthalten ist. Dies geschieht dadurch, daß man die eine Zahl so viel mal als möglich von der andern abziehet. Z. B. $12:4=3$; denn 4 steckt in 12 dreymal oder 4 läßt sich 3 mal von 12 abziehen. 12 ist der **Dividendus** oder die zu dividirende Zahl oder die, von der die andere Zahl 4 abgezogen werden soll. **Der Divisor** ist die Zahl 4, welche subtrahirt wird, oder durch die man dividirt. **Der Quotient** ist die Zahl 3, welche anzeigt, wie oft man subtrahirt hat oder wie oft der Divisor im Dividendus enthalten ist.

§. 20.

Da der Quotient angibt, wie oft der Divisor im Dividendus enthalten ist, so **steckt der Divisor gerade so oft im Dividendus als die Einheit im Quotienten.** Es ist gleichfalls klar, daß wenn der Divisor so oft zu sich selbst gelegt wird, als der Quotient Einheiten enthält, der Dividendus entsteht, oder **wenn der Divisor mit dem Quotienten multiplicirt wird, das Product der Dividendus ist.** (§. 14). Die Multiplication ist also die Probe der Division.

§. 21.

**Wenn Divisor und Dividendus gleich groß sind, so ist der Quotient = 1**; denn eine Größe

kann

kann nur Einmal von einer andern gleichen Größe abgezogen werden, also ist sie in derselben nur Einmal enthalten, also der Quotient = 1. (§. 19).

So ist $\frac{a}{a} = \frac{8}{8} = 5 : 5 = 1.$

§. 22.

**Wenn der Dividendus o ist, so wird der Quotient auch o**; denn jede ganze Zahl ist in o Nul mal enthalten oder $\frac{0}{4} = 0$. Denn so wie aus dem Divisor 4 der Dividendus o entsteht, wenn man der Zahl 4 alle Größe nimmt, so muß auch aus 1 der Quotient entstehen, wenn man alle Größe aufhebt oder vernichtet (§. 20); also ist der Quotient $\frac{0}{4} = 0$.

**Anmerk.** Eine ganz andere Sache ist es aber, wenn eine endliche Größe durch o dividirt wird, z. B. $\frac{2}{0}$. Der Quotient muß eine solche Größe seyn, in der die Einheit so oft enthalten ist als der Divisor o im Dividendus 2. (§. 20). Wir wollen nun o nicht als 0, sondern als eine unendlich kleine Größe, z. B. als ein Quadrillion-Theilchen betrachten, woraus folgt, daß man eine unzählige Menge solcher Quadrillion-Theilchen nehmen muß, ehe man die Zahl 2 erhält und daher auch eine unendlich große Zahl von Einheiten ehe man den Quotienten hervorbringt d. h. der

Quotient

Quotient wird unendlich groß seyn. **Endliche Größen** sind solche, welche eine bestimmte Menge von Einheiten enthalten. **Eine unendlich große Größe** ist diejenige, welche größer ist als jede endliche Größe und eine **unendlich kleine Größe** eine solche, welche kleiner ist als jede endliche Größe.

## §. 23.

### Eine gegebene Zahl mit einer andern zu dividiren.

1) Man fange von der linken Hand bey der höchsten Zahl an und nehme zur ersten Klasse so viele Zahlen, daß der Divisor wenigstens Einmal aber nicht über zehnmal in derselben enthalten ist.

2) Man untersuche nun, wie oft der Divisor in diesem Theile des Dividendus steckt (§. 17.). Die Zahl, die dies anzeigt, schreibe man in die Stelle des Quotienten.

3) Den ersten Theil des Quotienten multiplicire man mit dem Divisor, schreibe das Product unter den Dividendus und ziehe es von demselben ab.

4) Zum Unterschiede setze man die nächst folgende Zahl des Dividendus und untersuche nun ferner, wie oft der Divisor in demselben enthalten ist. Diesen neuen Quotienten schreibe man zu dem vorigen und multiplicire ihn mit dem Divisor.

Das

Das Product wird darunter geschrieben und abgezogen.

5) Eine folgende Zahl des Dividendus setze man zu dem zuletzt gefundenen Unterschied herunter und behandele diese Klasse eben so wie die vorige.

6) Wenn zuletzt alle Zahlen des Dividendus heruntergesetzt sind und nichts übrig bleibt, so geht der Divisor in den Dividendus auf. Sollte aber etwas übrig bleiben, so muß es kleiner als der Divisor seyn. Die Division kann alsdann nicht weiter fortgesetzt werden, sondern muß durch das Divisions-Zeichen angedeutet werden. (§. 5).

Erstes Beyspiel

| | | |
|---|---|---|
| 3) 26295 | 8000 | |
| 24000 | | |
| 2295 | 700 | |
| 2100 | | |
| 195 | 60 | |
| 180 | | |
| 15 | 5 | |
| 15 | | |
| 00 | 8765 | |

Zweytes Beyspiel

| | | |
|---|---|---|
| 254) 138938 | 547 | |
| 1270 | | |
| 1193 | | |
| 1016 | | |
| 1778 | | |
| 1778 | | |
| 0000 | | |

Beweis. Aus der Art, wie die Division im ersten Beyspiel behandelt worden ist, ersieht man deutlich,

lich, daß die gefundene Zahl anzeigt, wie oft die eine gegebene Zahl in den Zehntausenden, Tausenden, Hunderten, Zehnern und Einern der andern gegebenen Zahl enthalten ist.

Denn $\frac{26295}{3} = 8000 + \frac{2295}{3}$; aber $\frac{2295}{3} = 700 + \frac{195}{3}$; $\frac{195}{3} = 60 + \frac{15}{3}$ und $\frac{15}{3} = 5$. Also $\frac{26295}{3} = 8000 + 700 + 60 + 5 = 8765$; folglich ist die gefundene Zahl der Quotient (§. 19).

**Anmerk.** Bey der Division ist noch weiter zu bemerken: 1) daß wenn bey einer Klasse in der Mitte der Division es geschehen sollte, daß der Rest nebst den heruntergesetzten Zahlen kleiner ist als der Divisor, so ist dieser 0 mal in demselben enthalten, 0 muß in den Quotienten gesetzt und die folgende Zahl des Dividendus heruntergerückt und die Division auf die gewöhnliche Weise fortgesetzt werden. 2) Der Quotient jeder Klasse kann nicht größer als 9 und der Rest nicht größer als der Divisor seyn. 3) Wenn entweder der Divisor allein oder der Divisor und Dividendus Nullen am Ende haben, d. h. keine Einer oder Zehner u. s. w. haben, so kann man die Nullen des Divisors und eben so viel Nullen oder Zahlen des Dividendus

dendus abſchneiden, welche letztere allein bey der letzten Diviſion in Betrachtung kommen.

Erſtes Beyſpiel.

5,000 | 802,345 | 160 $\frac{2345}{5000}$
5

30
30

02
00

2345

Zweytes Beyſpiel.

32,0 | 5642,0 | 176 $\frac{192}{320}$
32

244
224

202
192

100

§. 24.

Bey der Addition, Subtraction, Multiplication und Diviſion benannter Zahlen verfährt man nach denſelben Regeln, welche bey unbenannten Zahlen erklärt ſind. Man bemerke nur, daß Zahlen

kleinern Einheit so viel als möglich in einer größern Einheit oder Namen ausgedrückt werden müssen. Z. B. 14 mß = 12 mß + 2 mß = 4 ʒ + 2 mß. Gleichfalls muß man, wenn man in der Subtraction bey der vorhergehenden Klasse oder der größern Einheit leihet, diese in Zahlen der kleinern Einheit verwandeln. Beyspiele werden diese Sache besser ins Licht setzen als weitläuftige Regeln.

| Addition. | | | | Subtraction. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 ʒ | 2 mß | 12 ß | | 254 Ellen | 16 Zoll | 10 Lin. | |
| 21 • | 2 • | 8 • | | 32 • | 20 • | 8 • | |
| 46 • | 1 • | 10 • | | | | | |
| 81 ʒ | 0 mß | 14 ß | | 221 Ellen | 16 Zoll | 2 Lin. | |

(Die Elle = 20 Zoll, der Zoll = 10 Lin.)

| Multiplication. | | | | Division. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 ℔ | 12 ℥ | 20 Loth | | 30 ℔ | 75 ℥ | 24 Loth | |
| mit • | • | • | 6 | dividirt durch • | | | 3 |
| 30 ℔ | 75 ℥ | 24 Loth | | 10 ℔ | 25 ℥ | 8 Loth | |

**Anmerk.** Eine benannte Zahl multipliciren oder dividiren heißt sie einige Mal zu sich selbst legen (§. 14.) oder eine andere Zahl einige Mal von ihr abziehen (§. 19.). Die Zahl, welche dies angibt, heißt Multiplicator oder Divisor und ist also eine unbenannte Zahl (§. 2.). Eine benannte Zahl mit einer andern

dern benannten multipliciren oder dividiren ist daher gegen die Natur der Sache. So ist es ein arithmetischer Widerspruch, 2 ℳ 1 ß 12 ₰ mit 2 ℳ 1 ß 12 ₰ zu multipliciren. 2 ℳ 1 ß 12 ₰ multipliciren heißt diese Größe einige Mal zu sich selbst legen, aber dies 2 ℳ 1 ß 12 ₰ Mal zu thun ist ein Ausdruck ohne den geringsten vernünftigen Sinn.

## Viertes Kapitel.

### Von den gemeinen Brüchen.

§. 25.

Eine ganze Zahl ist eine solche, welche aus ungetheilten Einheiten besteht d. h. aus solchen, auf deren Theile keine Rücksicht genommen wird. Eine gebrochene Zahl oder ein Bruch ist Ein oder mehrere Theile einer in gleiche Theile getheilten Einheit. Wenn eine Einheit oder jede Größe, welche sich als ein Ganzes betrachten läßt, in gewisse gleich große Theile getheilt und von diesen einer oder mehrere genommen werden, so nennt man diese Größe in Vergleichung mit dem Ganzen oder der Einheit einen Bruch derselben. Wenn man einen Fuß in zwölf

gleiche Theile oder Werkzolle oder Duodecimalzolle theilt und deren 5 nimmt, so hat man $\frac{5}{12}$ eines Fußes. Theilt man den Fuß in zehn gleiche Theile oder Decimalzolle und nimmt deren sieben, so entsteht der Bruch $\frac{7}{10}$ Fuß. Die Zahl, welche die Anzahl der Theile angibt oder benennt, in welche das Ganze getheilt worden ist, heißt der **Nenner** z. B. 12 oder 10. Die Zahl aber, welche andeutet oder zählt, wie viele solcher Theile man genommen hat, heißt der **Zähler** z. B. 5 oder 7. Der Zähler wird oben und der Nenner unten geschrieben und beyde durch einen Strich getrennt.

## §. 26.

**Ein eigentlicher Bruch** ist derjenige, dessen Zähler kleiner ist als der Nenner z. B. $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{1}{17}$, $\frac{3}{7}$ und der also kleiner als ein Ganzes ist. (§. 6. Grundsf. 1.) z. B. $\frac{16}{18} < 1$. Ist der Zähler gleich dem Nenner, so ist **der Werth des Bruchs der zur Einheit angenommenen Größe gleich**, z. B. $\frac{15}{15} = \frac{10}{10} = \frac{7}{7} = 1$. Die Einheit ist nämlich in 15, 10, 7 Theile getheilt, wie der Nenner anzeigt; ist nun der Zähler eben so groß, so hat man alle diese Theile und folglich die ganze Einheit genommen (§. 6. Grundsf. 1). **Ist der Zähler größer als der Nenner, so ist der Bruch größer als die Einheit.** Z. B. $\frac{5}{2} = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} = 1 + 1 + 1$

$+ 1 + 1 = 4$, welches anzeigt, daß man das Ganze in zwey gleiche Theile getheilt und deren 8 genommen hat. So oft man aber 2 Zweytheile nimmt, hat man ein Ganzes, man hat also 4 Ganze genommen; also ist $\frac{8}{2} = 4 > 1$. Läßt sich der Zähler ohne Rest durch den Nenner dividiren, so ist der Bruch eine ganze Zahl; z. B. $\frac{21}{7} = \frac{7}{7} + \frac{7}{7} + \frac{7}{7} = 3$.

## §. 27.

Wenn der Zähler entweder eben so groß oder größer als der Nenner ist, so heißt der Bruch ein **uneigentlicher Bruch** (fractio impropria seu spuria). Aus dem vorher gesagten ersieht man zugleich, **daß man einen uneigentlichen Bruch in Ganze und Brüche verwandeln kann**, wenn man den Zähler durch den Nenner dividirt, wo dann der Quotient eine ganze Zahl und der Rest ein eigentlicher Bruch ist. Z. B. $\frac{24}{5} = \frac{20}{5} + \frac{4}{5} = 4 + \frac{4}{5} = 4\frac{4}{5}$; $\frac{10}{3} = \frac{9}{3} + \frac{1}{3} = 3 + \frac{1}{3} = 3\frac{1}{3}$; $\frac{145}{12} = \frac{144}{12} + \frac{7}{12} = 12 + \frac{7}{12} = 12\frac{7}{12}$. **Will man aber umgekehrt eine ganze und gebrochene Zahl in einen Bruch verwandeln**, so multiplicirt man nur die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruchs und addirt zum Product den Zähler des Bruchs. Die Summe wird der Zähler des neuen Bruchs, dessen Nenner der vorige Nenner ist. Z. B. $5\frac{2}{3} = \frac{15}{3} + \frac{2}{3} = \frac{17}{3}$; $1\frac{5}{9} = \frac{9}{9} + \frac{5}{9} = \frac{14}{9}$; $114\frac{1}{5} = \frac{570}{5} + \frac{1}{5} = \frac{571}{5}$.

§. 28.

Wenn zwey Brüche gleiche Nenner aber ungleiche Zähler haben z. B. $\frac{5}{9}$ und $\frac{7}{9}$, so ist der Bruch der gröſte, der den gröſten Zähler hat. Denn wenn ein Ganzes in gleich viele Theile z. B. in 9 getheilt wird, und man deren mehr z. B. 7 nimmt, so muß dieſer Bruch gröſſer ſeyn, als wenn man deren weniger nimmt z. B. 2 (§. 6. Grundſ. 1); oder weil $7 > 2$, ſo iſt $\frac{7}{9} > \frac{2}{9}$. (§. 6. Grundſ. 5).

Sind die Zähler zweyer Brüche gleich, die Nenner derſelben aber ungleich, ſo iſt der Bruch der gröſte, der den kleinſten Nenner hat. Z. B. $\frac{4}{5} > \frac{4}{10}$. Der erſte Bruch zeigt an, daß das Ganze in 5 Theile getheilt iſt und man deren 4 genommen hat (§. 25); der zweyte Bruch bedeutet, daß das Ganze in 10 Theile getheilt, und deren auch nur 4 genommen ſind; in je weniger Theile aber das Ganze getheilt wird, deſto gröſſer iſt jeder Theil; alſo weil $\frac{4}{5} > \frac{4}{10}$ ſo iſt auch $\frac{4}{7} > \frac{4}{10}$ (§. 6. Grundſ. 5.)

§. 29.

Wenn ſich Zähler und Nenner eines Bruchs z. B. $\frac{12}{18}$ durch eine und dieſelbe Zahl z. B. 6 dividiren laſſen: ſo wird der Werth deſſelben dadurch nicht verändert; z. B. $\frac{12:6}{18:6} = \frac{2}{3}$. Wenn der Zähler 12 durch die Zahl 6 dividirt wird,



ſo

wird derselbe und folglich auch der Bruch so vielmal kleiner als die Zahl 6 Einheiten enthält (§. 25. 26); wird nun aber auch der Nenner des Bruchs durch dieselbe Zahl 6 dividirt, so bekommt das Ganze dadurch desto weniger Theile und der Bruch wird daher so vielmal größer als Einheiten in der Zahl 6 sind. Wenn also Zähler und Nenner durch eben dieselbe Zahl dividirt werden, so ist der neue Bruch dem gegebenen gleich oder $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$.

§. 30.

**Ein Bruch läßt sich aufheben**, wenn man Zähler und Nenner desselben durch eine und dieselbe Zahl dividirt; der neue Bruch ist dem gegebenen gleich (§. 29). Z. B. $\frac{18}{24} = \frac{18:6}{24:6} = \frac{3}{4}$; $\frac{24}{48} = \frac{24:12}{48:12} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Zur Auffindung derjenigen Zahl, durch welche Zähler und Nenner sich aufheben lassen, können folgende Betrachtungen über Primzahlen, zusammengesetzte Zahlen und gemeinschaftliches Maaß der Zahlen den Weg bahnen.

§. 31.

Man sagt, eine kleinere Zahl sey das Maaß einer größern, wenn erstere einige Mal genommen der größern gleich ist, oder wenn die größere Zahl sich ohne Rest durch die kleinere dividiren läßt; so mißt

dieſe die gröſsere Zahl. So wird 60 durch 5 gemeſſen, weil 5. 12 = 60 iſt; gleichfalls mißt 5 auch 20, weil 4. 5 = 20 iſt. Ein aliquoter Theil iſt ein ſolcher Theil eines Ganzen, der daſſelbe mißt; z. B. 12 iſt ein aliquoter Theil von 60. Ein aliquanter Theil iſt ein ſolcher, der das Ganze nicht mißt; z. B. 6 iſt ein aliquanter Theil von 100; 11 von 60. Eine abſolute Primzahl (numerus primus) hat kein anderes Maaß als die Einheit; z. B. 3, 5, 7, 11, 13, u. ſ. w. Dieſe haben alſo keine andere Factoren als die Einheit und ſich ſelbſt, 3 = 1. 3; 5 = 1. 5. Zuſammengeſetzte Zahlen laſſen ſich durch andere Zahlen als die Einheit meſſen; z. B. 18 = 2. 9; 64 = 16. 4 = 8. 8 = 2. 32. Relative Primzahlen (primi inter ſe) heiſſen zwey oder mehrere Zahlen, die kein anderes gemeinſchaftliches Maaß als die Einheit haben; z. B. 19 und 24; 8 und 113. Relative zuſammengeſetzte Zahlen (compoſiti inter ſe) haben ein anderes gemeinſchaftliches Maaß als die Einheit; z. B. 9, 12, 15 gehen durch 3 auf. Wenn alſo Zähler und Nenner eines Bruchs relative Primzahlen ſind, ſo läßt ſich derſelbe nicht aufheben. (§. 30).

Anmerk. Wenn man eine Zahl in ſolche Factoren auflöſt, welche Primzahlen ſind, ſo ſagt man, die Zahl werde in ihre einfachen Factoren aufgelöſt. Alle andere Factoren der ge-

gebenen Zahl, welche durch die Multiplication der Primzahlen mit sich selbst oder mit andern zusammengesetzten Zahlen entstehen, heissen **zusammengesetzte Factoren.** So sind 2. 2. 2. 3 die einfachen Factoren von 24; aber 4. 6 die zusammengesetzten Factoren eben derselben Zahl. Will man sowohl die einfachen als zusammengesetzten Factoren einer gegebenen Zahl z. B. 330 finden, so kann man auf folgende Art verfahren:

Man dividire die Zahl 330 durch den kleinsten möglichen Factor und setze denselben rechts vom Striche, den Quotienten 165 aber links unter die Zahl.

| | |
|---|---|
| 330 | 2 |
| 165 | 3,6 |
| 55 | 5,10,15,30, |
| 11 | 11,22,33,66,55, 110,165,330. |

Diesen Quotienten dividirt man wieder durch die kleinste mögliche Zahl 3, welche man ebenfalls rechts und den Quotienten 55 links setzet. Diesen dividirt man wieder durch die kleinste mögliche Zahl 5 und setzet diese wie vorhin rechts und den Quotienten 11 links. Auf die Art hat man alle einfache Factoren von 330 nämlich: 2, 3, 5, 11.

Um die zusammengesetzten Factoren zu finden, multiplicire man den ersten Factor 2 mit dem zweyten 3 und setze das Product 6 in die zweyte Linie.

Ferner multiplicire man den 3ten Factor 5 mit 2, 3 und 6, so entstehen 10, 15, 30; darauf 11 mit 2, 3, 6, 5, 10, 15, 30, wodurch 22, 33, 66, 55, 110, 165, 330 entstehen. Eben so sind von 45 die einfachen Factoren 3 und 5 und die zusammengesetzten 9, 15, 45. Wenn man nun einen Bruch $\frac{45}{330}$ hat und unter den gefundenen Factoren des Zählers und Nenners ein gemeinschaftlicher Factor 15 ist, so läßt sich der Bruch durch diese Zahl aufheben. $\frac{45}{330} = \frac{45:15}{330:15} = \frac{3}{22}$. Anjema hat Tabellen der Factoren aller Zahlen von 1 bis 10000 (Leiden 1760 in 4to) herausgegeben. Ferner hat man Tabula omnium factorum simplicium numerorum per 2, 3, 5 non divisibilium ab 1 usque ad 10,000000 ab Antonio Felkel Wien 1776 in Fol. In Vegas Vorlesungen über die Mathematik Wien 1793 findet man Tafeln der einfachen Factoren von 1 bis 10500 und aller Primzahlen von 1 bis 100000 Pag. 504-536.

## §. 32.

**Wenn eine Zahl 100 durch eine andere 12 dividirt wird und zum Rest 4 gibt und eine ganze Zahl den Divisor 12 und den Rest 4 mißt, so mißt sie auch den Dividendus 100.**

Der Dividendus 100 ist $= 8 . 12 + 4$. Weil nun vermöge der Bedingung 2 die Zahlen 12 und 4 mißt,

mißt, so sind 12 und 4 aus 2 zusammengesetzt (§. 31) oder $12 = 6.2$ und $4 = 2.2$; also $100 = 8.6.2 + 2.2$ und folglich, weil 2 ein Factor von $8.6.2 + 2.2$ ist, muß sich 100 durch 2 dividiren lassen.

## §. 33.

**Wenn eine ganze Zahl 92 durch eine andere 16 dividirt wird und zum Rest 12 übrig läßt, so wird durch die Zahl 4, durch welche der Divisor und der Dividendus aufgehen, auch der Rest 12 aufgehen.**

Der Dividendus $92 = 16.5 + 12$ und $92 - 16.5 = 12$ (§. 6. Grundsl. 4). Vermöge der Bedingung mißt 4 den Divisor und den Dividendus oder $16 = 4.4$ und $92 = 23.4$, also $23.4 - 4.4.5 = 12$. Der Rest 12 muß also nothwendig eine solche Zahl seyn, in welcher 4 als ein Factor steckt; also mißt 4, welches den Divisor und Dividendus mißt, auch den Rest.

## §. 34.

**Die größte Zahl, durch welche der Divisor und der Rest aufgehen, ist auch die größte, durch welche der Divisor und der Dividendus aufgehen;** denn gäbe es eine größere Zahl, durch welche die beyden ersten aufgingen, so müßten die beyden letztern auch durch eben dieselbe aufgehen. (§. 32. 33.)

§. 35.

## §. 86.

**Man soll zu zwey gegebenen Zahlen das gröſste gemeinschaftliche Maaſs finden.**

Die Zahlen sind 588 und 756.

1) Die gröſste Zahl macht man zum Dividendus und die kleinste zum Divisor, worauf man dividirt und den Rest unten hinsetzt.

2) Diesen Rest 168 sieht man nun als Divisor und den vorigen Divisor 588 als Dividendus an. Man verrichte die Division und setze den Rest unten hin.

3) Diesen Rest 84 mache man zum Divisor und den vorigen Divisor 168 zum Dividendus, worauf man wieder dividirt. Jetzt geht die Division auf, der Rest ist also = 0 und der letzte Divisor 84 das gröſste gemeinschaftliche Maaſs der Zahlen 588 und 756.

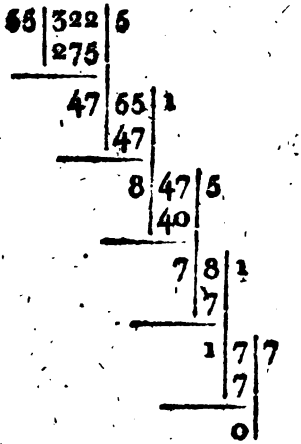
4) Geschieht es, daſs der nächst letzte Rest 1 wird, so haben die Zahlen ausser der Einheit kein gemeinschaftliches Maaſs und sind daher relative Primzahlen (§. 31). Z. B. 55 und 322.

Erstes Beyspiel.

| | | |
|---|---|---|
| 588 | 756 | 1 |
| | 588 | |
| 168 | 588 | 3 |
| | 504 | |
| 84 | 168 | 2 |
| | 168 | |
| | 0 | |

Zwey-

Zweytes Beyſpiel.




**Beweis.** Man kann die im erſten Beyſpiel geführte Rechnung ſo aufſetzen:

| Dividendus | Diviſor | Reſt |
|---|---|---|
| 756 | 588 | 168 |
| 588 | 168 | 84 |
| 168 | 84 | 0 |

84 in der zweyten Linie geht als ein Reſt betrachtet in 168 als Diviſor betrachtet auf, alſo auch in 588 als Dividendus (§. 32). Geht aber 84 in 168 in der erſten Linie als Reſt betrachtet und in 588 als Diviſor betrachtet auf, ſo geht 84 auch im Dividendus 756 auf (§. 32); alſo iſt 84 das größte gemeinſchaftliche Maaß der Zahlen 588 und 756 (§. 34).

§. 36.

## §. 36.

Wenn man einen Bruch aufheben soll, so sucht man das größte gemeinschaftliche Maaß des Zählers und Nenners (§. 35) und dividirt beyde durch dasselbe (§. 29). So ist $\frac{588}{756} = \frac{588:84}{756:84} = \frac{7}{9}$; $\frac{91}{294} = \frac{91:7}{294:7} = \frac{13}{42}$; $\frac{48}{272} = \frac{3}{17}$; $\frac{840}{1848} = \frac{1}{11}$; $\frac{3668}{11510} = \frac{7}{22}$; aber $\frac{55}{122}$ und $\frac{113}{311}$ lassen sich nicht aufheben.

## §. 37.

Wenn man eine ganze Zahl 5 mit einer andern ganzen Zahl 6 multiplicirt und darauf durch dieselbe wieder dividirt, so bleibt die Zahl 5 unverändert oder $\frac{5 \cdot 6}{6} = 5$, und wenn man den Zähler und Nenner eines Bruchs mit einer und derselben Zahl multiplicirt, so ist der neue Bruch dem gegebenen gleich oder $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$.

a) Wenn man 5 mit 6 multiplicirt, so legt man 6 fünfmal zu sich selbst (§. 14.) oder 6 wird fünfmal größer; wenn man nun aber 5. 6 durch 6 dividirt, so nimmt man 6 fünfmal von 5. 6, oder 5. 6 wird sechsmal kleiner (§. 19.) oder 5 bleibt unverändert. (§. 6. Grundsf. 4.)

b) Wenn der Zähler des Bruchs $\frac{2}{3}$ mit der gegebenen Zahl multiplicirt wird, so macht man dadurch den Bruch so vielmal größer als die Zahl

4 Einheiten enthält (§. 25. 28). Wird nun der Nenner auch durch dieselbe Zahl multiplicirt, so wird der Bruch $\frac{3}{7 \cdot 5}$ dadurch so vielmal kleiner als Einheiten in der Zahl 4 sind. Wenn daher Zähler und Nenner eines Bruchs durch eine und dieselbe Zahl multiplicirt werden, so ist der dadurch entstandene Bruch dem gegebenen gleich.

## §. 38.

**Brüche werden auf gleiche Benennung gebracht** d. h. andere Brüche gefunden, welche den gegebenen gleich sind, aber gleiche Nenner haben, wenn man den Zähler und Nenner des einen Bruchs mit dem Nenner des andern multiplicirt, wenn nur zwey Brüche da sind; aber mit dem Product aus den Nennern der übrigen Brüche, wenn mehr als zwey Brüche gegeben sind. (§. 37).

| Erstes Beyspiel | Zweytes Beyspiel |
|---|---|
| 7. $\frac{3}{4} = \frac{21}{28}$ | 3. 5. $\frac{1}{2} = \frac{15}{30}$ |
| 4. $\frac{1}{7} = \frac{20}{28}$ | 2. 5. $\frac{2}{3} = \frac{20}{30}$ |
| | 2. 3. $\frac{4}{5} = \frac{24}{30}$ |

## §. 39.

**Brüche zu addiren.** Man bringe die Brüche auf gleiche Benennung (§. 38.) und weil sie dann als Größen einerley Art angesehen werden können (§. 25), so addire man ihre Zähler. Die Summe der Zähler ist der Zähler des neuen Bruchs bey dem gemeinschaftlichen

lichen Nenner und der Bruch selbst den gegebenen Brüchen gleich (§. 37. 38.).

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{12}{24} + \frac{16}{24} + \frac{18}{24} = \frac{46}{24} = 1 + \frac{22}{24}$$

**Anmerk.** Man kann diese Rechnung etwas abkürzen, wenn man den **kleinsten General-Nenner** sucht, in welchen die Nenner der gegebenen Brüche aufgehen. Zu dem Ende schreibt man die Nenner der gegebenen Brüche neben einander, und dividirt sie durch eine Zahl, durch welche wenn möglich alle, oder doch wenigstens die meisten derselben sich dividiren lassen. Diesen Divisor setzt man vorne, die Quotienten unten und diejenigen Nenner, die sich nicht haben dividiren lassen, eben daselbst unverändert hin. Zu diesen sucht man eine neue Zahl, durch welche dieselben aufgehen, und schreibt die Quotienten hin und so fährt man fort, bis alle Quotienten relative Primzahlen sind. Das Product derselben und aller gebrauchten Divisoren ist der General-Nenner, weil dieser ein Product der gebrauchten Divisoren und der übrig gebliebenen Zahlen ist, welche Factoren der gegebenen Nenner sind. (§. 31.). Wir wollen die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{12}$, $\frac{1}{24}$ annehmen.

Die

Die gegebenen Nenner sind 63, 42, 84

Divisor 21 ) 3, 2, 4

Divisor 2 ) 3, 1, 2

Der General-Nenner = 2.1.3.2.21 = 252.

Es seyen ferner die gegebenen Brüche

$\frac{2}{7}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{8}$.

Die gegebenen Nenner sind 3, 4, 9, 8

Divisor 3 ) 1, 4, 3, 8

Divisor 2 ) 1, 2, 3, 4

Divisor 2 ) 1, 1, 3, 2

Der General-Nenner = 2.3.1.1.2.2.3 = 72.

Um die Zähler der zu addirenden Brüche zu finden, dividire man den General-Nenner durch den Nenner eines jeden Bruchs, und multiplicire den Quotienten mit dem Zähler jedes Bruches. Die Rechnung kann am bequemsten folgender Gestalt aufgesetzt werden.

| | General-Nenner | Quotient | Neue Zähler |
|---|---|---|---|
| $\frac{2}{7}$ | | 4 | 52 |
| $\frac{2}{4}$ | 252 | 6 | 54 |
| $\frac{1}{8}$ | | 3 | 33 |
| | | Summe = | $\frac{139}{252}$ |

| General-Nenner | Quotienten | Neue Zähler |
|---|---|---|
| 72 | 24 | 48 |
| | 18 | 18 |
| | 8 | 16 |
| | 9 | 9 |

Summe $= \frac{91}{72} = 1\frac{19}{72}$

§. 40.

**Einen Bruch von dem andern zu subtrahiren.** Man bringe die Brüche auf gleiche Benennung (§. 38.) und subtrahire die Zähler. Der Unterschied ist der Zähler des neuen Bruchs bey dem gemeinsamen Nenner.

$$\frac{4}{5} - \frac{2}{9} = \frac{36}{45} - \frac{10}{45} = \frac{26}{45}$$
$$\frac{6}{8} - \frac{2}{11} = \frac{66}{88} - \frac{16}{88} = \frac{50}{88} = \frac{25}{44}$$

**Anmerk.** Wenn die Nenner der zu subtrahirenden Brüche keine relative Primzahlen sind, so kann man die Rechnung mit Vortheil abkürzen, wenn man den kleinsten General-Nenner findet. Man soll von $\frac{11}{56}$ den Bruch $\frac{5}{48}$ subtrahiren.

56, 48
4) 14, 12
2) 7, 6

Der General-Nenner = 6. 7. 2. 4. = 336

| | General-Nenner | Quotienten | Neue Zähler |
|---|---|---|---|
| $\frac{11}{56}$ | | 6 | 66 |
| $\frac{5}{48}$ | 336 | 7 | 35 |
| | | Unterſch. = | $\frac{91}{336}$ |

§. 41.

Wenn man ganze Zahlen und Brüche addiren ſoll, ſo bringt man die Brüche unter gleiche Benennung (§. 38. 39), addirt die Zähler und legt die Einheiten, die aus den Brüchen herauskommen, zu den ganzen Zahlen.

| Erſtes Beyſpiel. | Zweytes Beyſpiel. |
|---|---|
| $12\frac{4}{7} = 12\frac{16}{28}$ | $150\frac{5}{9} = 150\frac{20}{36}$ |
| $24\frac{3}{4} = 24\frac{21}{28}$ | $267\frac{11}{12} = 267\frac{33}{36}$ |
| $37\frac{11}{28}$ | $418\frac{17}{36}$ |

Wenn man einen Bruch von einer ganzen Zahl ſubtrahiren ſoll, ſo muß man bey der ganzen Zahl eine Einheit leihen und dieſelbe in einen Bruch verwandeln, deſſen Zähler und Nenner dem Nenner des gegebenen Bruchs gleich ſind und dieſen von jenem ſubtrahiren. Z. B. $7 - \frac{4}{7} = 6 + \frac{7}{7} - \frac{4}{7} = 6\frac{3}{7}$; eben ſo $56 - \frac{9}{11} = 55 + \frac{11}{11} - \frac{9}{11} = 55\frac{2}{11}$. Sollen eine ganze Zahl und ein Bruch von einer ganzen Zahl und einem Bruche ſubtrahirt werden, ſo muß man zuerſt die

Brüche auf gleiche Benennung bringen. Zuweilen ist man wie im zweyten Beyspiel genöthigt ein Ganzes zu leihen.

| Erstes Beyspiel. | | Zweytes Beyspiel. | |
|---|---|---|---|
| $56\frac{3}{4}$ | $= 56\frac{3}{4}$ | $23\frac{1}{12}$ | $= 23\frac{1}{12}$ |
| $8\frac{1}{2}$ | $= 8\frac{2}{4}$ | $9\frac{1}{6}$ | $= 9\frac{10}{12}$ |
| | $48\frac{1}{4}$ | | $13\frac{9}{12}$ |

## §. 42.

**Einen Bruch mit einem andern zu multiplicíren.** Man multiplicire Zähler mit Zähler, Nenner mit Nenner; das Product der Zähler gibt den Zähler und das der Nenner den Nenner des neuen Bruchs, welcher das Product der zwey gegebenen Brüche ist.

$\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{21}$; $\frac{7}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{7}{72}$; $\frac{2}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{8}{49}$.

**Beweis.** Wenn man im ersten Beyspiel $\frac{4}{7}$ mit $\frac{2}{3}$ multipliciren soll, so muß auf eben die Art, wie der Multiplicator $\frac{2}{3}$ aus der Einheit entsteht, das Product aus dem Multiplicandus zum Vorschein kommen. (§. 15). Aus der Einheit entsteht $\frac{2}{3}$ dadurch, daß man die Einheit in drey gleiche Theile theilt und deren zwey nimmt (§. 25); also muß aus dem Multiplicandus $\frac{4}{7}$ auch das Product dadurch entstehen, daß man $\frac{4}{7}$ in drey Theile theilt und davon zwey nimmt. Soll aber die Größe $\frac{4}{7}$ in drey gleiche Theile getheilt werden,

werden, so wird sie $\frac{4}{15}$, weil jeder Theil der Einheit in 3 Theile also die ganze Einheit in 15 Theile getheilt werden soll. Diese neuen Theile soll man zweymal nehmen; also $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{8}{15} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3}$ und man findet daher das Product zweyer Brüche, wenn man Zähler und Nenner derselben mit einander multiplicirt.

§. 43.

**Soll man eine ganze Zahl mit einem Bruch oder einen Bruch mit einer ganzen Zahl multipliciren,** so multiplicirt man nur den Zähler mit der gegebenen ganzen Zahl; der Nenner bleibt unverändert. Wenn man z. B. $\frac{7}{9}$ mit 4 multipliciren soll, so heißt das so viel, daß man $\frac{7}{9}$ 4mal zu sich selbst zu addiren hat (§. 15); nämlich $\frac{7}{9} \cdot 4 = \frac{7}{9} + \frac{7}{9} + \frac{7}{9} + \frac{7}{9} = \frac{7+7+7+7}{9} = \frac{28}{9}$ (§. 38) $= 3\frac{1}{9}$ (§. 27). Eben so ist $\frac{3}{5} \cdot 8 = \frac{8 \cdot 3}{5} = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$.

§. 44.

**Wenn man ganze Zahlen und Brüche mit ganzen Zahlen und Brüchen multipliciren soll,** so kann man zuerst beyde Factoren in uneigentliche Brüche verwandeln (§. 27) und dann Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliciren (§. 42).

Z. B. $5\frac{2}{3} \cdot 2\frac{1}{2} = \frac{17}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{85}{6} = 14\frac{1}{6}$

$8\frac{2}{3} \cdot 6\frac{2}{5} = \frac{74}{9} \cdot \frac{32}{5} = \frac{2368}{45} = 52\frac{28}{45}$

**Anmerk.** Man könnte die Multiplication ganzer Zahlen und Brüche auch auf die Art verrichten, daß man sie als mit + verbundene Glieder ansähe, nämlich $5\frac{2}{3} = 5 + \frac{2}{3}$ und $2\frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2}$, sie unter einander setzte, die obere Reihe zuerst mit $\frac{1}{2}$ und darauf mit 2 multiplicirte. Die Rechnung würde dann so aussehen:

$$\begin{array}{r} 5 + \frac{2}{3} \\ 2 + \frac{1}{2} \\ \hline \frac{5}{2} + \frac{2}{6} \\ 10 + \frac{4}{3} \\ \hline \end{array}$$

$$10 + \frac{4}{3} + \frac{5}{2} + \frac{2}{6} = 10 + \frac{8}{6} + \frac{15}{6} + \frac{2}{6}$$
$$= 10 + \frac{25}{6} = 14\frac{1}{6}$$

## §. 45.

**Einen Bruch durch einen Bruch zu dividiren.** Denjenigen Bruch, welcher Divisor ist, kehrt man um d. h. setzt den Nenner dahin, wo der Zähler stand, und diesen dahin wo jener stand, und multiplicirt darauf den Divisor mit dem Dividendus. Der neue Bruch ist der Quotient.

$$\frac{5}{6} : \frac{3}{4} = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{18} = 1\frac{2}{18} = 1\frac{1}{9}$$
$$\frac{2}{15} : \frac{4}{7} = \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{4} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}.$$

**Beweis.** Wenn $\frac{3}{4}$ durch $\frac{1}{4}$ dividirt werden soll, so erhellt gleich, daß $\frac{1}{4}$ dreymal in $\frac{3}{4}$ enthalten ist (§. 25), weil erstere Größe sich dreymal von der letztern abziehen läßt (§. 19). Wenn ferner $\frac{8}{11}$ durch $\frac{2}{11}$ dividirt werden soll, so ist der Quotient $= \frac{8}{2} = 4$, d. h. der Zähler des Dividendus muß durch den Zähler des Divisors dividirt werden. Will man nun Brüche von ungleicher Benennung durch einander dividiren z. B. $\frac{5}{6}$ durch $\frac{3}{4}$, so muß man sie zuerst auf gleiche Benennung bringen d. h. $\frac{20}{24}$ und $\frac{18}{24}$, um deutlich sehen zu können, wie oft der eine in dem andern enthalten ist. $\frac{18}{24}$ nämlich ist eben so oft in $\frac{20}{24}$ enthalten als 18 in 20 steckt; also ist $\frac{5}{6} : \frac{3}{4} = \frac{20}{18} = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{3}$, oder das Product des Dividendus in den umgekehrten Divisor.

## §. 46.

**Wenn man ganze Zahlen durch Brüche oder Brüche durch ganze Zahlen dividiren soll, so sehe man die ganze Zahl als einen Bruch an, dessen Nenner 1 ist und behandle beyde dann wie ordentliche Brüche, indem man nämlich den Divisor umkehrt und dann multiplicirt (§. 45).**

$$5 : \frac{7}{8} = \frac{5}{1} : \frac{7}{8} = \frac{5}{1} \cdot \frac{8}{7} = \frac{40}{7} = 5\frac{5}{7}$$

$$\frac{2}{3} : 8 = \frac{2}{3} : \frac{8}{1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

**Soll man ganze Zahlen und Brüche durch ganze Zahlen und Brüche dividiren, so verwandle man beyde in uneigentliche Brüche (§. 27) und ver-**

fahre bey der Division so als wären es eigentliche Brüche (§. 45).

$3\frac{2}{3} : 2\frac{1}{2} = \frac{11}{3} : \frac{5}{2} = \frac{11}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{22}{15} = 1\frac{7}{15}$

$7\frac{3}{4} : 5\frac{2}{3} = \frac{31}{4} : \frac{17}{3} = \frac{31}{4} \cdot \frac{3}{17} = \frac{93}{68} = 1\frac{25}{68}$

**Anmerk.** 1. Wenn man einen Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt, so ist das Product größer als der gegebene Bruch, weil derselbe so oft zu sich selbst gelegt wird als die ganze Zahl Einheiten hat. (§. 14). Wenn man einen Bruch mit einem andern multiplicirt, so ist das Product kleiner als jeder der gegebenen Brüche, weil derselbe noch nicht Einmal zu sich selbst addirt wird (§. 42.). Dividirt man eine ganze Zahl durch einen Bruch oder einen größern uneigentlichen Bruch durch einen kleinern eigentlichen Bruch, so ist der Quotient größer als der Dividendus (§. 20. 45). Dividirt man aber einen eigentlichen Bruch durch eine ganze Zahl, so ist der Quotient kleiner als der Dividendus, weil eigentlich der Nenner mit der ganzen Zahl multiplicirt wird (§. 46) und der Zähler unverändert bleibt; also wird der Werth des Bruchs vermindert (§. 28).

**Anmerk.** 2. Ein gebrochener Bruch (Fractio fracta) entstehet, wenn entweder der Zähler oder der Nenner oder beyde mit einem andern

dem Bruch multiplicirt oder dividirt werden. Solcher Brüche gibt es hauptsächlich vier Arten.

a) Wenn der Zähler eines Bruchs mit einem andern Bruch multiplicirt wird und es ist dann so viel als ob der gegebene Bruch mit dem andern multiplicirt werden sollte. Z.B.

$$\frac{6 \cdot \frac{3}{4}}{6} = \frac{6 : \frac{4}{3}}{6} : 6 = \frac{6 \cdot \frac{3}{4}}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{6 \cdot 3}{4 \cdot 6} = \frac{18}{24}.$$

2) Wenn der Nenner eines Bruchs mit einem andern Bruch multiplicirt wird, so ist es eben so viel, als wenn der gegebene Bruch durch den andern dividirt würde.

$$\frac{6}{6 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{6}{1} : \frac{6 \cdot 3}{4} = \frac{6}{1} \cdot \frac{4}{6 \cdot 3} = \frac{6 \cdot 4}{6 \cdot 3} = \frac{24}{18}$$

3) Wenn der Zähler eines Bruchs durch einen andern Bruch dividirt wird, so heißt das den gegebenen Bruch durch den neben gesetzten dividiren.

$$\frac{6 : \frac{3}{4}}{6} = \frac{\frac{6}{1} : \frac{3}{4}}{6} = \frac{\frac{6}{1} \cdot \frac{4}{3}}{6} = \frac{6 \cdot 4}{3} : \frac{6}{1} = \frac{6 \cdot 4}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{24}{18}.$$

4) Wenn der Nenner eines Bruchs durch einen andern dividirt wird, so heißt das den gegebenen Bruch mit dem neben gesetzten multiplicirem.

$$\frac{6}{6 : \frac{3}{4}} = \frac{6}{\frac{6}{1} : \frac{3}{4}} = \frac{6}{\frac{6}{1} \cdot \frac{4}{3}} = 6 : \frac{24}{3} = \frac{6}{1} \cdot \frac{3}{24} = \frac{18}{24}.$$

Anmerk. 3. Hieher gehören auch noch die zusammenhängenden Brüche (fractiones continuae), welche eine Reihe von Brüchen sind, deren Nenner aus einer ganzen Zahl und einem Bruch bestehen.

Z. B. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ oder $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\frac{4}{9}$

Wenn man den Werth der Größe im ersten Beyspiel bestimmen will, so muß man unten mit $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ anfangen. $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=1:4+\frac{1}{5}=1:\frac{21}{5}=\frac{5}{21}$. Ferner $\frac{1}{3}+\frac{5}{21}=1:3+\frac{5}{21}=1:\frac{68}{21}=\frac{21}{68}$ und die ganze Reihe $=\frac{1}{2}+\frac{21}{68}=1:2+\frac{21}{68}$ $1:\frac{157}{68}=\frac{68}{157}$. Die allgemeine Theorie dieser Brüche findet man in Traité d'Algebre par Bossut, Paris 1773 p. 65-74, in Lamberts Beyträgen zum Gebrauch der Mathematik, 2ter Theil, Berlin 1770 pag. 54-153 und in Mitterpacher von Mitternburgs Unterricht in der mathematischen Analysis herausgegeben von Pasqvich, 1ster Band, Leipzig 1790 pag. 108-134.

# Fünftes Kapitel.
## Von den Decimalbrüchen.

### §. 47.

Decimalbrüche sind solche Brüche, deren Nenner zehn oder höhere Ordnungen von zehn, 100, 1000, 10000 u. s. w. sind. So sind $\frac{3}{10}$, $\frac{42}{100}$, $\frac{218}{1000}$, $\frac{7}{10000}$ Decimalbrüche.

Man schreibt aber die Nenner nicht, sondern bloß die Zähler, so daß das Ganze oder, wenn kein Ganzes vorhanden ist, o auf die linke Seite eines Kommas oder Puncts und auf die rechte Seite der Zähler gesetzt wird. Die erste Stelle rechts vom Komma bedeutet Zehn-, die zweyte Hundert-, die dritte Tausend-, die vierte Zehntausendtheile u. s. w. Den Nenner muß man auf die Art sich denken, als stünde die Einheit vorne unter dem Komma linker Hand und dann die Nullen folgten. So wird $\frac{2}{10}$ geschrieben 0,2; $\frac{26}{100} = 0{,}26$; $4\frac{72}{100} = 4{,}72$; $8\frac{746}{1000} = 8{,}746$. Eben so lieset man 56,08 sechs und funfzig Ganze, o Zehntheile und 8 Hunderttheile $= 26\frac{8}{100}$ Eben so $32\frac{753}{1000} = 32{,}753 = 32$ Ganze, 7 Zehntheile, 5 Hunderttheile und 3 Tausendtheile. Endlich $26\frac{8}{10000} = 26{,}0008$ lieset man 26 Ganze, o Zehntheile, o Hunderttheile, o Tausendtheile und 8 Zehntausendtheile. Hieraus folgt, daß jeder Decimalbruch

malbruch z. B. 6,4597 ſich in Zehn-, Hundert-, Tauſendtheilen u. ſ. w. ausdrücken läßt. Nämlich 6,4597 $= 6 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{7}{10000}$ und bringt man alle auf gleiche Benennung $= \frac{60000}{10000} + \frac{4000}{10000} + \frac{500}{10000} + \frac{90}{10000} + \frac{7}{10000}$.

## §. 48.

Wenn man Zähler und Nenner eines Bruchs mit einer und derſelben Zahl multiplicirt, ſo wird dadurch der Werth des Bruchs nicht verändert (§. 37); wenn man aber 0 zu einem Decimalbruch fügt, ſo multiplicirt man dadurch Zähler und Nenner deſſelben durch 10; fügt man aber 2 Nullen hinzu, ſo wird dadurch Zähler und Nenner 100 mal größer u. ſ. w. **Der Werth eines Decimalbruchs wird alſo nicht verändert, wenn man auch ſo viele Nullen anfügt als man will.** Z. B. 0,5 = 0,500; denn $\frac{5}{10} = \frac{50}{100} = \frac{500}{1000}$ u. ſ. w. ferner 67,03 = 67,030; denn $\frac{6703}{100} = \frac{67030}{1000}$; eben ſo 0,060 = 0,060000.

## §. 49.

**Decimalbrüche zu addiren.** Man ſchreibe die Brüche ſo unter einander, daß Komma unter Komma ſteht, woraus folgt, daß dann Ganze unter Ganzen, Zehntheile unter Zehntheilen, Hundertheile unter Hundertheilen u. ſ. w. ſtehen (§. 47). Da nun durch dieſe Untereinanderſetzung die Theile von gleicher Benennung ſind, ſo können ſie wie Größen einerley Art

eben

eben so zusammengezählt und addirt werden, wie es bey ganzen Zahlen geschieht.

| Erstes Beyspiel. | Zweytes Beyspiel. | Drittes Beyspiel. |
|---|---|---|
| 35,709 | 5,0024 | 458,97 |
| 6,086 | 0,38 | 56,845 |
| | 7,003 | 9,54006 |
| 41,795 | 12,3854 | 525,35506 |

§. 50.

**Decimalbrüche zu subtrahiren.** Die gegebenen Brüche werden unter einander geschrieben, Komma unter Komma, Zehntheile unter Zehntheile, wie bey der Addition und dann von einander subtrahirt, wie bey ganzen Zahlen. Man bemerke nur, daß wenn in dem Bruche, von welchem die Subtraction geschehen soll, weniger Decimalstellen sind als in dem Bruche, welcher subtrahirt werden soll, man sich in dem ersten Bruche so viele Nullen denken müsse, daß derselbe eben so viele Decimalstellen erhält als der zweyte Bruch (§. 48.). Bey diesen Nullen leihet man, wie im zweyten Beyspiel gewiesen wird.

| Erstes Beyspiel. | Zweytes Beyspiel. | Drittes Beyspiel. |
|---|---|---|
| 4,8274 | 3,842 | 6,00435 |
| 2,0139 | 1,004554 | 0,17 |
| 2,8135 | 2,837446 | 5,83435 |

§. 51.

## §. 51.

## Decimalbrüche zu multipliciren.

1) Ohne auf das Komma oder die Zahl der Decimalen zu sehen, schreibe man die Brüche unter einander und multiplicire sie wie ganze Zahlen.

2) Man zähle die Decimalen beyder Factoren und schneide im Product von der rechten zur linken Hand deren eben so viele ab. Das Komma zeigt nun, wie viel Ganze und Decimalstellen das Product enthält. Man sehe das dritte Beyspiel.

3) Sollten im Product nicht so viele Decimalstellen seyn, als die Summe der Decimalen beyder Factoren beträgt, so setze man linker Hand Nullen und bringe dann das Komma an seinen gehörigen Ort, wie im zweyten Beyspiel.

4) Wenn einer der Factoren eine ganze Zahl ist, so kann das Product nicht mehr Decimalen erhalten als der andere Factor hat, wie im ersten Beyspiel.

| Erstes Beyspiel. | Zweytes Beyspiel. | Drittes Beyspiel. |
|---|---|---|
| 43,72 | 0,0345 | 17,23 |
| 13 | 0,023 | 0,41 |
| 13116 | 1035 | 1723 |
| 4372 | 690 | 6892 |
| 568,36 | 0,0007935 | 7,0643 |

Be-

**Beweis.** Wenn man zwey Decimalbrüche mit einander multiplicirt, so ist das Product derselben, so wie bey der Multiplication gemeiner Brüche, das Product der Zähler dividirt durch das Product der Nenner (§. 42.); aber das Product der Zähler ist das Product der Decimalbrüche als wären sie ganze Zahlen und das Product der Nenner muß eine Zahl von einer Ordnung der Zehn seyn, welche so viel Nullen enthält als die Summe der Nullen beyder Nenner beträgt (§. 8. 18.) oder so viel Decimalen hat, als beyde Factoren zusammen haben (§. 47.), woraus also erhellet, daß das Komma an seinen gehörigen Ort gesetzt ist.

## §. 52.

Im vorhergehenden geschah die Multiplication der Decimalbrüche von der rechten zur linken Hand (wie im nächstfolgenden ersten Beyspiel); aber man kann die Multiplication auch von der linken zur rechten Hand vornehmen d. h. den Multiplicandus zuerst mit den Zehn-, darauf mit den Hundertheilen u. s. w. des Multiplicators multipliciren und die Producte immer Eine Stelle (?) weiter rechts setzen, wie im zweyten Beyspiel geschehen ist.

| Erstes Beyspiel. | Zweytes Beyspiel. | |
|---|---|---|
| 0,426 | 0,426 | |
| 0,243 | 0,243 | |
| 1278 | 0,0852 | = 0,426.0,2 |
| 1704 | 1704 | = 0,426.0,04 |
| 852 | 1278 | = 0,426.0,003 |
| 0,103518 | 0,103518 | = 0,426.0,243 |

Wenn sowohl der Multiplicator als der Multiplicandus viele Decimalen haben, so wird die Rechnung etwas weitläuftig. In den meisten Fällen bedarf man nicht aller Decimalen des Products und gewöhnlich kann man sich mit 6 derselben oder Millionentheilen begnügen. Dies hat die **abgekürzte Multiplication** (multiplicatio contracta) veranlaßt, welche darin besteht, daß man bey der Multiplication mit den Zehntheilen anfängt, bey den Hundertheilen aber die letzte Decimalzahl des Multiplicandus wegläßt; bey den Tausendtheilen die beyden letzten; bey den Zehntausendtheilen die drey letzten u. s. w. Das erste Beyspiel wird dies Verfahren in ein näheres Licht setzen.

## Erstes Beyspiel:

0,7142857
0,4285714

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0,28571428 | = | 0,7142857 | . 0,4 |
| 1428570 | = | 0,714285 | . 0,02 |
| 571424 | = | 0,71428 | . 0,008 |
| 35710 | = | 0,7142 | . 0,0005 |
| 4998 | = | 0,714 | . 0,00007 |
| 71 | = | 0,71 | . 0,000001 |
| 28 | = | 0,7 | . 0,0000004 |
| 0,30612229 | | | |

## Zweytes Beyspiel:

9,34528
3,44776

28,03584
3,73811
37381
6541
654
56

32,22027

Drittes Beyſpiel:

0,234567
0,003431

0,000703701
93827
7035
234

0,000804797

Wo das Komma in der erſten Linie des Products ſtehen müſſe, beſtimmt ſich nach der allgemeinen Regel aus den Decimalen des Multiplicandus und der erſten Decimale des Multiplicators (§. 51.). Im erſten Beyſpiel hat der Multiplicandus 7 Decimalen und die Multiplication geſchieht mit der erſten Decimale oder den Zehntheilen des Multiplicators; alſo bekommt die erſte Linie 7 + 1 = 8 Decimalen. In dem zweyten Beyſpiel, wo die erſte Linie aus der Multiplication des Multiplicandus mit der ganzen Zahl 3 entſtehet, bekommt das erſte Product 5 + 0 = 5 Decimalen. In dem dritten Beyſpiel, wo die Multiplication mit der dritten Decimale oder Tauſend-

sendtheilen geschieht, erhält die erste Linie des Productes = 6 + 3 = 9 Decimalen (§. 51.). Die letzte Zahl rechter Hand im Product ist wegen der übergangenen Klassen der Decimalen offenbar zu klein und die nächst letzte kann aus gleicher Ursache zuweilen auch noch etwas unrichtig seyn; aber alle übrige Decimalen des Products sind zuverlässig. So ist im zweyten Beyspiel das genaue Product 9,34528. 3,44776 = 32,2202825728 und das durch die abgekürzte Multiplication gefundene Product ist nur $\frac{1}{100000}$ der Einheit zu klein.

## §. 53.

### Decimalbrüche zu dividiren.

1) Sind im Dividendus mehr Decimalen als im Divisor, so dividire man wie bey ganzen Zahlen; schneide aber im Quotienten so viele Decimalen ab als der Unterschied zwischen den Decimalen des Dividendus und des Divisors beträgt.

Erstes Beyspiel:

0,25) 0,87525 | 3,501
75
---
125
125
---
2
0
---
25
25
---
0

Zweytes Beyspiel:

1,6) 2,334 | 1,45
16
---
73
64
---
94
80
---
14

Im ersten Beyspiel ist der Quotient genau gefunden; aber im zweyten bleibt etwas übrig; also $\frac{2,334}{1,6} = 1,45\frac{14}{1600}$. Diesen Bruch kann man wegschaffen, wenn man Nullen zum Zähler 14 setzt und die Division so lange fortsetzt, als man will. Man wird den Quotienten $= 1,45875$ finden.

Beweis. Man soll Bruch durch Bruch dividiren und der Quotient ist ein Bruch, dessen Zähler und Nen-

Nenner vermittelst der Division des Zählers und Nenners des Dividendus durch den Zähler und Nenner des Divisors entstehen (§. 19. 45). Der Quotient der Zähler ist schon durch die Division der Decimalbrüche, als wären sie ganze Zahlen, entstanden. Der Quotient der Nenner ist eine höhere Ordnung der Zehn dividirt durch eine niedrigere; dieser Bruch muß sich aber immer aufheben oder abkürzen lassen, (z. B. im ersten Beyspiel $\frac{100000}{100} = 1000$) und das was heraus kommt erhält so viele Nullen als der Unterschied zwischen den Nullen im Nenner des Dividendus und im Nenner des Divisors, aber dadurch werden die Decimalen im Quotienten bestimmt; also sind die Decimalen im Quotienten der Unterschied zwischen den Decimalen des Dividendus und des Divisors. Dies wird noch deutlicher durch das zweyte Beyspiel:

$$\frac{2334}{1000} : \frac{16}{10} = \frac{2334 : 16}{1000 : 10} = \frac{145\frac{14}{16}}{100} = 1{,}45\frac{14}{1600}.$$

2) Wenn im Dividendus weniger Decimalen sind als im Divisor, so kann man dem Dividendus so viele Nullen anfügen als man will (§. 48). Die Division wird dann nach der ersten Regel vorgenommen, wobey die Nullen als Decimalen des Dividendus angesehen werden.

| Erstes Beyspiel. | | Zweytes Beyspiel. | |
|---|---|---|---|
| 2,35)4,2 . . . . | (1,787 | 0,2345)3,24 . . . . | (13,81 |
| 235 . . . | | 2345 . . . | |
| 1850 . . | | 8950 . . | |
| 1645 . . | | 7035 . . | |
| 2050 . | | 19150 . | |
| 1880 . | | 18760 . | |
| 1700 | | 3900 | |
| 1645 | | 2345 | |
| 55 | | 1555 | |

5) Soll man Decimalbrüche durch ganze Zahlen dividiren, so gehört dies noch unter die vorige Regel, wobey nur zu bemerken, daß der Quotient gerade so viele Decimalen erhalte als der Dividendus hat, weil der Divisor ohne Decimalen ist. Sollte der Dividendus zu wenig Decimalen enthalten, so muß man demselben Nullen oder Puncte anfügen, wie im ersten Beyspiel. Hat aber der Quotient weniger Zahlen als der Dividendus Decimalen hat, so fügt man links die nöthigen Nullen hinzu, wie im ersten und zweyten Beyspiel.

Erſtes Beyſpiel.

220)0,7 . . . . . (0,003181
660 . . . .
400 . .
220 . .
1800 .
1760 .
400
220
180

Zweytes Beyſpiel.

232)2,34552(0,01011
232
255
232
232
232
0

4) Wenn man eine ganze Zahl durch einen Decimalbruch dividiren ſoll, ſo fügt man zur ganzen Zahl ſo viele Nullen oder Puncte hinzu als der Diviſor Decimalen hat, und der Quotient iſt eine ganze Zahl und wenn nichts übrig bleibt

genau eine ganze Zahl, wie im ersten Beyspiel; bleibt aber etwas übrig, so kann man abermals Nullen oder Puncte hinzusetzen, und Zehn-, Hundert-, Tausendtheile u. s. w. des Quotienten finden, wie im zweyten Beyspiel.

Erstes Beyspiel.

0,25)3124..(12496
25 ..
62 ..
50 ..
124..
100..
240.
225.
150
150
0

Zweytes Beyspiel.

0,321)21 ....(65,42
1926...
1740..
1605..
1350.
1284.
660
642
18

Beweis. Wenn eine ganze Zahl durch einen Decimalbruch dividirt werden soll, so muß man die ganze Zahl mit dem ungekehrten Divisor multiplici-ren (§. 45) d. h. die ganze Zahl mit dem Nenner, der aus Zehn, Hundert, oder Tausend besteht (§. 47.), mul-

multipliciren. Man hängt daher der ganzen Zahl so viele Nullen an als der Decimalbruch Nullen hat (§. 18.) und dividirt dies Product durch den Zähler. Das was heraus kommt, es mag nun eine ganze Zahl oder eine ganze Zahl und ein Bruch seyn, ist der gesuchte Quotient (§. 45.). Nämlich im ersten Beyspiel ist $\frac{3124}{0,25} = 3124 : \frac{25}{100} = 3124 . \frac{100}{25} = \frac{312400}{25} = 12296$. Eben so $\frac{21}{0,321} = 21 : \frac{321}{1000} = \frac{21,1000}{321} = \frac{21000}{321} = 65,42$.

## §. 64.

**Anmerk.** So wie es bey der Multiplication der Decimalbrüche eine Abkürzung gibt (§. 52.), so kann man auch eine **abgekürzte Division** anwenden. Bey der ersten Division oder der ersten Zahl des Quotienten dividirt man den ganzen Dividendus durch den ganzen Divisor. Bey der zweyten Zahl des Quotienten läßt man die letzte Decimale des Divisors weg, bey der dritten die folgende des Divisors u. s. w. Folgende Beyspiele werden die Sache in ein helleres Licht setzen, bey welchen zu desto grösserer Deutlichkeit der abgekürzte Divisor bey jeder Klasse beygesetzt ist, welches man sonst nicht nöthig hat.

Erstes Beyspiel.

7,4²857)26,53061(3,57144
22 28571
4 24490
3 71425
53065
51996
1069
742
327
296
31
28
3

Zweytes Beyspiel.

9,345²8)32,22027(3,44777
28 03584
4 18443
3 73808
44635
37380
7255
6538
717
651
66
63
3

Da der Divisor etwas kleiner angenommen wird als er wirklich ist, weil man bey der Division die letzten Decimalen wegläßt; so muß dadurch der Quotient etwas gröſſer werden als er eigentlich ist. In dem ersten Beyspiel ist der Quotient $\frac{12}{100000}$; in dem zweyten $\frac{1}{10000}$ zu groß.

## §. 55.

## Einen gemeinen eigentlichen Bruch in einen Decimalbruch von einem gegebenen Nenner von 100, 1000, 10000 u. s. w. Theilen zu verwandeln.

Man multiplicire den Zähler des gegebenen gemeinen Bruchs mit dem Nenner des Decimalbruchs und dividire dies Product durch den Nenner des gemeinen Bruchs. Der Quotient ist der Zähler des Decimalbruchs beym gegebenen Decimalnenner. So ist im ersten Beyspiel $\frac{3}{4}$ genau $= 0{,}75$, $\frac{1}{4} = 0{,}25$ und $\frac{1}{2} = 0{,}5$. Aber im zweyten und dritten Beyspiel bleibt etwas übrig und $\frac{1}{9}$ und $\frac{7}{24}$ lassen sich nicht genau in Decimalbrüche verwandeln. Inzwischen kann man durch Hinzufügung von Nullen die Division fortsetzen und sich dem wahren Werthe immer mehr und mehr nähern, bis zuletzt der Fehler, der durch Wegwerfung des letzten Bruchs entsteht, kleiner als jede gegebene endliche Gröſse wird.

Erstes

$\frac{3}{4}$

4)300(0,75
28
---
20
20
---
0

Zweytes

$\frac{1}{9}$

9)10000(0,1111
9
---
10
9
---
10
9
---
10
9
---
10
9
---
1

Drittes Beyspiel.

$\frac{7}{24}$

24)700000(0,29166
48
---
220
216
---
40
24
---
160
144
---
160
144
---
16

Be-

**Beweis.** Wenn ein gegebener gemeiner Bruch in einen Decimalbruch von einem gegebenen Nenner z. B. von Hunderttheilen verwandelt werden soll, so muß man den Zähler dieses Bruchs suchen. Diesen wollen wir = a annehmen, so ist nach der Voraussetzung $\frac{3}{4} = \frac{a}{100}$. Multiplicirt man nun mit 100 so ist $\frac{3 \cdot 100}{4} = 75 = a$ (§. 48); der gesuchte Decimalbruch ist also = 0,75 = $\frac{3}{4}$.

**Anmerk.** Ich will hier den Werth der am häufigsten vorkommenden gemeinen Brüche in Decimalbrüchen hersetzen. Die hinten stehenden Puncte zeigen an, daß der Decimalbruch nur durch Näherung gefunden ist.

| | |
|---|---|
| $\frac{1}{2} = 0,5$ | $\frac{1}{6} = 0,166666...$ |
| $\frac{1}{3} = 0,333333...$ | $\frac{1}{7} = 0,142857 1...$ |
| $\frac{1}{4} = 0,25$ | $\frac{1}{8} = 0,125$ |
| $\frac{1}{5} = 0,2$ | $\frac{1}{9} = 0,111111...$ |

Man kann leicht den Werth eines jeden andern Bruchs von der Benennung eines der oben stehenden Brüche finden, wenn man den Decimalbruch mit dem gegebenen Zähler multiplicirt. So ist $\frac{7}{8} = \frac{1}{8} \cdot 7 = 0,125 \cdot 7 = 0,875$. Eben so $\frac{2}{7} = \frac{1}{7} \cdot 2 = 0,142857 1 \cdot 2 = 0,285714 2$. Aber die letzte Decimalstelle kann zuweilen etwas fehlerhaft seyn. Setzt man die Division lange fort, so wird es sich zuweilen zutragen, daß dieselben Zahlen des Decimalbruchs nach einer gewissen

Ord-

Ordnung und Abwechselung wieder vorkommen. Z. B. $\frac{1}{7} = 0,142857142857142857 \ldots$. Eben so $\frac{1}{11} = 0,090909090909 \ldots$, woraus man leicht ersiehet, daß in allen Eilftheilen, durch Decimalbrüche ausgedrückt, eine bestimmte Ordnung im Zähler bleiben müsse. Z. B. $\frac{2}{11} = \frac{1}{11} \cdot 2 = 0,18181818 \ldots$; $\frac{3}{11} = \frac{1}{11} \cdot 3 = 0,27272727 \ldots$; $\frac{5}{11} = \frac{1}{11} \cdot 5 = 0,454545 \ldots$; $\frac{10}{11} = \frac{1}{11} \cdot 10 = 0,90909090 \ldots$. Die Decimalbrüche sind von grosser Wichtigkeit und Brauchbarkeit in allen mathematischen Berechnungen. Nach der Genauigkeit, die man zu erhalten wünscht, gebraucht man mehr oder weniger Decimalen und hat der Bruch deren mehr als nöthig sind, so wirft man einige der hintersten weg. **Wenn der erste der weggeworfenen Decimalen mehr als 5 beträgt, so muß man die letzte der übrig gebliebenen um 1 erhöhen; wenn aber die erste der weggeworfenen Decimalen kleiner als 5 ist, so wird die letzte der übrig gebliebenen Decimalen nicht vermehrt.** Wenn z. B. von 0,456687 die letzte Decimale 7 weggeworfen wird, so muß 8 um 1 erhöhet werden und der Decimalbruch wird 0,45669; denn 0,45669 weichet von 0,456687 nur $\frac{3}{1000000}$ ab, 0,45668 aber $\frac{7}{1000000}$ und also kommt man der Wahrheit näher, wenn man die letzte Decimale um 1 erhöhet. Eben so wenn man zwey Decimalen weg-

werfen

werfen wollte, bliebe der Bruch 0,456687 = 0,4567; eben so 8,426 = 8,43. Wenn man in 0,925 die letzte Decimale wegwerfen will, so wird der Bruch 0,92 dem wirklichen Werthe näher kommen als 0,93 und also muß die letzte Decimale nicht erhöhet werden. Wenn die weggeworfene Decimale 5 ist, so ist es gleichgültig, ob man die letzte Decimale erhöht oder nicht; z. B. wenn man den Decimalbruch 0,2345 hat, so ist es einerley, ob man ihn gleich 0, 234 oder 0,235 annimmt.

## Sechstes Kapitel.

### Von den Quadrat- und Kubikzahlen.

§. 56.

**Eine Quadratzahl oder eine Zahl in der zweyten Potenz** ist ein Product zweyer gleichen Factoren. Das Quadrat einer Zahl entstehet also, wenn man eine Zahl mit sich selbst multiplicirt. So ist 9 = 3. 3 oder das Quadrat von 3 und 64 das Quadrat von 8. Jeder dieser gleichen Factoren heißt die **Quadratwurzel**; so ist 5 die Quadratwurzel von 25, weil 5. 5. = 25 ist. **Die Quadratwurzel aus einer gegebenen Zahl ziehen** heißt diejenige Zahl finden, welche

welche mit sich selbst multiplicirt die gegebene Zahl hervorbringt. Das Quadrat bezeichnet man durch die kleine Zahl 2 über der Wurzel. So ist $12^2 = 12 \cdot 12 = 144$; ferner $9^2 = 9 \cdot 9 = 81$ und $a^2$ bezeichnet das Quadrat einer Größe a. Das Ausziehen der Quadratwurzel deutet man durch $\sqrt{}$ an; z. B. $\sqrt{64} = 8$; $\sqrt{36} = 6$ und $\sqrt{6}$ bedeutet, daß aus der Größe 6 die Quadratwurzel gezogen werden soll.

§. 57.

**Ein Kubus** oder **eine Kubikzahl** oder **eine Zahl in der dritten Potenz** ist ein Product dreyer gleichen Factoren, oder eine Kubikzahl entstehet, wenn eine Zahl 3 mal mit sich selbst multiplicirt wird. Der Kubus von 3 ist $= 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. Der Kubus von $5 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. Einer dieser gleichen Factoren heißt die **Kubikwurzel**; so ist 10 die Kubikwurzel von 1000, weil $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ ist. **Die Kubikwurzel einer Zahl finden**, heißt eine Zahl finden, welche dreymal mit sich selbst multiplicirt die gegebene Zahl hervorbringt. Den Kubus einer Zahl bezeichnet man durch die kleine Zahl 3 über der Wurzel; z. B. $6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$; $8^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$. Die Ausziehung der Kubikwurzel deutet man durch $\sqrt[3]{}$ an; z. B. $\sqrt[3]{216} = 6$; $\sqrt[3]{512} = 8$; $\sqrt[3]{m}$ bedeutet die Kubikwurzel aus der Größe m.

§. 58.

## §. 58.

Die Quadrate und Kubus der Zahlen von 1 bis 10 enthält folgende Tafel.

| Wurzeln | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Quadrate | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 100 |
| Kubus | 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 216 | 343 | 512 | 729 | 1000 |

Man ersieht hieraus, daß kein Quadrat einer Zahl aus der Ordnung der Einer d. h. von 1 bis 9 mehr als zwey Zahlzeichen oder Klassen und kein Kubus eines Einers mehr als drey Zahlen hat, denn von 9, der größten Zahl aus der Klasse der Einer, ist das Quadrat 81 und der Kubus 729 oder erstere Zahl hat nicht mehr als zwey und letztere nicht mehr als drey Zahlzeichen oder Ziffern.

**Anmerk.** Zahlen, welche Einheiten aus der Klasse der Zehner, Hunderte, Tausende u. s. w. sind, quadriret oder kubiret man leicht dadurch, daß man Nullen hinzufügt (§. 18); so ist $80^2 = 6400 = 8^2 . 10^2 = 64 . 100$; eben so $600^2 = 6^2 . 100^2 = 36 . 10000 = 360000$; ferner $9000^3 = 9^3 . 1000^3 = 729 . 1000000000 = 729000000000$. Nach der Beschaffenheit unsers decadischen Zahlen-Systems können ganze Zahlen, die nicht Tausend übersteigen, durch Quadrate und Kubus von 10 ausgedrückt werden. Z. B. 3456

$= 3.1000 + 4.100 + 5.10 + 6 = 3.10^3 + 4.10^2 + 5.10 + 6$ und $9638 = 9.10^3 + 6.10^2 + 3.10 + 8$. Auf eben die Art können Decimalbrüche bezeichnet werden, wenn man durch Kubus, Quadrat und Wurzel $\frac{1}{10}$ dividirt. Z. B. $8{,}659 = 8 + \frac{6}{10} + \frac{5}{100} + \frac{9}{1000}$.

§. 59.

**Sind die Wurzeln gleich, so müssen auch ihre Quadrate und Kubus gleich seyn;** denn wenn gleiche Größen auf gleiche Weise vermehrt werden, so müssen auch die Resultate gleich seyn (§. 6. Grundsf. 4). So ist $6 = 4 + 2$ und das Quadrat von 6 muß eben so groß seyn als das Quadrat von $4 + 2$, oder $6^2 = (4 + 2)^2$. **Umgekehrt, sind die Quadrate und Kubus gleich, so müssen auch ihre Wurzeln gleich seyn.**

§. 60.

**Das Quadrat eines Bruchs findet man, wenn man Zähler und Nenner quadriret;** denn $(\frac{2}{3})^2 = \frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{4}{9} = \frac{2^2}{3^2}$. **Der Kubus eines Bruchs ist der Kubus des Zählers dividirt durch den Kubus des Nenners.** Z. B. $(\frac{4}{5})^3 = \frac{4.4.4}{5.5.5} = \frac{64}{125} = \frac{4^3}{5^3}$. **Die Quadrat- und Kubicwurzel eines Bruchs findet man, wenn man aus dem Zähler und Nenner die**

PARSONS LIBRARY
University of
MICHIGAN

die Quadrat- und Kubicwurzel ziehet. Z. B. $\sqrt{\frac{25}{100}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{100}} = \frac{5}{10}$ und $\sqrt[3]{\frac{64}{343}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{343}} = \frac{4}{7}$. Die Quadratwurzel eines Decimalbruchs findet man, wenn man dieſe Wurzel aus dem Zähler ziehet, indem man dadurch zugleich die Wurzel des Nenners erhält; denn

$$\sqrt{0,25} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{100}} = \frac{5}{10} = 0,5.$$

§. 61.

Wenn eine Zahl ſich nicht in zwey gleiche Factoren auflöſen läßt, ſo hat ſie keine genaue Quadratwurzel (§. 56.) So haben die Zahlen zwiſchen 4 und 9, zwiſchen 9 und 16, zwiſchen 16 und 25, als Quadratzahlen betrachtet, keine genaue Quadratwurzel. Solche Zahlen ſind 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22 u. ſ. w. Eben ſo haben die Zahlen, die ſich nicht in drey gleiche Factoren zerlegen laſſen, keine genaue Kubicwurzel; z. B. alle Zahlen zwiſchen 1 und 8, nämlich 2, 3, 4, 5, 6, 7.

§. 62.

Das Quadrat oder der Kubus einer ganzen Zahl iſt eine ganze Zahl und das Quadrat oder der Kubus eines Bruchs ein Bruch.

1) Wenn man eine ganze Zahl Ein oder mehrere Male mit ſich ſelbſt multiplicirt, ſo kann man

nur eine ganze Zahl erhalten (§. 14. 26); also sind deren Quadrat und Kubus auch ganze Zahlen.

a) Wenn man einen eigentlichen Bruch Ein oder mehrere Male mit sich selbst multiplicirt, so wird das Product kleiner als der Factor (§. 46. Anmerk. 1.) und um so viel mehr kleiner als ein Ganzes (§. 23) und also ein eigentlicher Bruch.

b) Ist der Bruch ein uneigentlicher Bruch, dessen Nenner nicht in den Zähler aufgehet, so kann man ihn durch das größte gemeinschaftliche Maaß des Zählers und Nenners aufheben oder abkürzen (§. 35), bis Zähler und Nenner relative Primzahlen werden (§. 31). Z. B. $\frac{63}{49} = \frac{9}{7}$. Quadriret oder kubiret man nun den Zähler und Nenner dieses uneigentlichen Bruchs z. B. $(\frac{7}{5})^2 = \frac{7 \cdot 7}{5 \cdot 5} = \frac{49}{25}$ oder $(\frac{7}{5})^3 = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{343}{125}$, so sind Zähler und Nenner Producte relativer Primzahlen; also kann der Nenner nicht in den Zähler aufgehen und folglich das Quadrat und der Kubus eines uneigentlichen Bruchs keine ganze Zahl seyn. (§. 26. 27).

## §. 63.

**Wenn die Quadrat- oder Kubicwurzel einer ganzen Zahl keine ganze Zahl ist, so gibt es auch keine ganze Zahl und einen Bruch oder einen**

nen uneigentlichen Bruch, welcher die Quadrat- oder Kubicwurzel der gegebenen ganzen Zahl seyn könnte.

Wir wollen annehmen, daß die Quadrat- oder Kubicwurzel einer ganzen Zahl eine ganze Zahl und ein Bruch oder ein uneigentlicher Bruch wäre, so müßte auch das Quadrat oder der Kubus dieser Wurzel ein uneigentlicher Bruch seyn (§. 62), welches gegen die Voraussetzung ist. Eben so wenig kann die Quadrat- oder Kubicwurzel einer ganzen Zahl ein eigentlicher Bruch seyn; denn sonst müßte die Quadrat- oder Kubiczahl auch ein Bruch seyn. Daher kann die Quadratwurzel von 7 oder die Kubicwurzel von 112 weder durch eine ganze Zahl noch durch eine ganze Zahl und einen Bruch genau ausgedrückt werden, sondern man muß sich mit Näherungen begnügen.

§. 64.

Wenn eine Zahl aus zwey Theilen bestehet, so enthält das Quadrat derselben das Quadrat des ersten Theils der Wurzel, das doppelte Product aus dem ersten Theil in den zweyten und das Quadrat des zweyten Theils der Wurzel.

Es sey die gegebene Zahl 24 in zwey Theile 20 + 4 oder in allgemeinen Zeichen in a + b zerlegt, so findet man das Quadrat dieser binomischen Wur-

zel, wenn man $20+4$ mit $20+4$ oder allgemein $a+b$ mit $a+b$ multiplicirt.

| | |
|---|---|
| $a+b$ | $20+4$ |
| $a+b$ | $20+4$ |
| $ab+b^2$ | $80+16$ |
| $a^2+ab$ | $400+80$ |
| $a^2+2ab+b^2$ | $400+160+16$ |

Die obere Reihe $a+b$ wird mit b multiplicirt; nämlich $b.b=b^2$ und b multiplicirt mit $a=b.a$. Dann multiplicirt man $a+b$ mit a; nämlich $a.a=a^2$ und b mit $a=b.a$. Werden nun die einzelnen Producte addirt, so bekommt man $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. Das Quadrat einer binomischen Wurzel $a+b$ besteht also aus $a^2$ oder dem Quadrat des ersten Theils; 2 ab oder dem zwiefachen Product des ersten Theils in den zweyten und aus dem Quadrat des zweyten Theils der Wurzel oder $b^2$. In dem zweyten Beyspiel in Zahlen siehet man ebenfalls, daß $(20+4)^2=400+160+16$ ist, wo $400=20^2$; $160=2.20.4$ und $16=4^2$.

## §. 65.

**Aus einer gegebenen Zahl die Quadratwurzel zu ziehen.** Die Zahl sey 966289.

1) Die gegebene Zahl wird von der rechten zur linken in Klassen von zwey Ziffern getheilt; denn zu

Einer

Einer Ziffer der Wurzel werden zwey Ziffern der Quadratzahl erfodert (§. 58). In der letzten Klasse linker Hand wird zuweilen nur Eine Zahl bleib. n.

2) Zu der äußersten Klasse linker Hand 96 suchet man die nächste Quadratzahl 81 (§. 58). Dieses Quadrat 81 setzet man unter 96 und subtrahirt es davon; die Wurzel 9 aber setzet man an ihren Ort.

3) Zu dem Reste setzet man die nächste Klasse 62 herunter. Darauf nimmt man 9 doppelt, welches den neuen Divisor gibt. Diesen schreibt man dergestalt hin, daß Eine Stelle rechter Hand frey bleibt. Man untersuche nun, wie oft der neue Divisor 18 in dem Reste und der zweyten Klasse enthalten ist. Der Quotient 8 ist der neue und zweyte Theil der Wurzel, welcher an seinen Ort neben 9 hingeschrieben wird.

4) Diesen neuen Theil der Wurzel 8 multiplicirt man mit dem Divisor 18 und setzt das Product 144 unter den Divisor. Das Quadrat des neuen Theils der Wurzel 64 setzt man nun dergestalt, daß die ledige Stelle rechter Hand ausgefüllt wird, addirt ihn zum Product 144 und subtrahirt die Summe 1504 von 1562.

5) Zu dem Reste 58 rückt man die folgende Klasse 89 herunter, wozu man den Divisor findet,

wenn man die bereits gefundenen Theile der Wurzel 98 als einen einzigen Theil betrachtet und denselben zweymal nimmt. Mit diesem verfährt man eben so, wie bey der vorigen Klasse. Wendet man diese Regel bey allen folgenden Klassen an, so erhält man die gesuchte Wurzel.

6) Bleibt etwas übrig, so hat die gegebene Zahl keine genaue Quadratwurzel; sondern man kann sich derselben nur dadurch nähern (§. 58, 62, 63), daß man dem Reste a Nullen anhängt, wodurch man die Wurzel in Zehntheilen erhält; fügt man noch a Nullen hinzu, so bekommt die Wurzel Hundertheile u. s. w., weil die Wurzel von $\frac{1}{100} = \frac{1}{10}$ und $\sqrt{\frac{1}{10000}} = \frac{1}{100}$ ist (§. 60).

Beyspiel.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| S . . . . | 96 | 62 | 89 | 983 . . . | M |
| | 81 | | | . . . . . | N |
| | 1562 | | | | |
| Divisor | (18) | | | | |
| | 144 . . . . . | | | | O |
| | 64 . . . . . | | | | P |
| | 1504 | | | | |
| | 5889 | | | | |
| Divisor | (196) | | | | |
| | 588 . . . . . | | | | Q |
| | 9 . . . . . | | | | R |
| | 5889 | | | | |
| | 0 | | | | |

Be-

**Beweis.** Wenn man überlegt, auf welche Weise aus der Quadratwurzel 983 oder M die Quadratzahl 966289 oder S entsteht, so kann man die Wurzel ansehen als bestünde sie aus drey Theilen 900 + 80 + 3. Man betrachte zuerst das Quadrat der beyden ersten Theile 900 + 80, welches aus folgendem besteht (§. 64).

1) dem Quadrat des ersten Theils
   900 . . . . . 810000 = N
2) dem zwiefachen ersten Theil
   1800 in den zweyten 80 . . 144000 = O
3) Dem Quadrat des zweyten
   Theils 80 . . . . . 6400 = P

Darauf betrachtet man 983, als bestünde es aus 980 + 3, dessen Quadrat eben so gefunden wird. (§. 64).

1) Das Quadrat von 980, welches wir schon gefunden und mit den Buchstaben N, O, P bezeichnet haben.
2) Das doppelte Product des ersten Theils 980 d. h. 1960 in den zweyten 3. . . . . 5880 = Q
3) Das Quadrat von 3. . . . . 9 = R

Also N = 810000
O = 144000
P = 6400
Q = 5880
R = 9

S = N + O + P + Q + R = 966289

Hieraus erſieht man, daß das Quadrat S = 966289 aus den Theilen N + O + P + Q + R = 810000 + 144000 + 6400 + 5880 + 9 beſtehet und da das Quadrat 966289 durch die Ausziehung der Quadratwurzel in dieſe Theile aufgelöſet worden iſt, ſo muß auch dies Verfahren richtig ſeyn.

**Anmerk.** Ich will ein Beyſpiel hinzufügen, wie man durch Näherung oder Approximation die Quadratwurzel von 5 findet, wozu man ſich ſo viele Nullen hinzugeſetzt denken kann als man will, jedoch in gerader Anzahl.

```
5|00|00|00 (2,236
4|
-
1 00
 (4)
  8
   4
  --
  84
 ----
 1600
  (44)
  132
    9
  ----
  1329
 -----
  27100
  (446)
  2676
    36
  -----
  26796
 ------
   304
```

Zu 5 ſucht man nämlich die nächſte Quadratzahl 4, welche man unter 5 ſchreibt und abziehet. Zu dem Unterſchiede 1 ſetzt man 2 Nullen herunter und nimmt den erſten Theil der Wurzel zweymal. Dies gibt den Diviſor 4, welchen man unter die erſte der heruntergerückten Nullen ſetzt. 4 ſteckt in 10 zweymal, welches der zweyte Theil der Wurzel wird und Zehn-

Zehntheile bedeutet. Diese Zahl 2 multiplicirt man mit dem Divisor 4 und schreibt das Product 8 gerade darunter. Darauf wird der zweyte Theil der Wurzel quadrirt und das Quadrat derselben so hingesetzt, daß der noch ledige Platz rechts ausgefüllt wird. Diese Größen (außer dem Divisor) addirt man und ziehet die Summe 84 von den darüber stehenden 100 ab, so ist man mit der ersten Klasse fertig. Darauf setzt man zu dem Rest 16 zwey Nullen herab, verdoppelt den gefundenen Theil der Wurzel 22, wodurch man den Divisor der zweyten Klasse erhält, nämlich 44. Dieser ist in 160 dreymal enthalten und 3 ist nun ein neuer Theil der Wurzel in Hundertheilen. So fährt man fort und behandelt die zweyte Klasse wie die erste. Zum Beweise der Richtigkeit der Rechnung multiplicire man 2,236 mit sich selbst und addire dazu den bey der dritten Klasse übrig gebliebenen Rest 304, so wird man 5 erhalten oder $(2{,}236)^2 + 304 = 5$.

## §. 66.

Wenn eine gegebene Zahl aus zwey Theilen besteht, so besteht der Kubus derselben aus dem Kubus des ersten Theils, dem dreyfachen Quadrat

drat des ersten Theils multiplicirt in den zweyten, dem dreyfachen ersten Theil multiplicirt in das Quadrat des zweyten und endlich aus dem Kubus des zweyten Theils.

Es sey die gegebene Zahl 24 in zwey Theile 20 + 4 oder in allgemeinen Zeichen in a + b getheilt, so findet man den Kubus dieser binomischen Wurzel, wenn man das Quadrat von 20 + 4 = 20. 20 + 2. 20. 4 + 4. 4 (§. 64.) mit der Wurzel 20 + 4 multiplicirt oder in allgemeinen Zeichen durch die Multiplication der Größe $a^2 + 2ab + b^2$ mit der Wurzel a + b (§. 57. 58.).

Also $24^3 =$ $20.20 + 2.20.4 + 4.4$ multiplicirt mit $20 + 4$

$20.20.4 + 2.20.4.4 + 4.4.4$

$20.20.20 + 2.20.4.20 + 20.4.4$

$(20+4)^3 = 20.20.20 + 3.20.20.4 + 3.20.4.4 + 4.4.4$

In allgemeinen Zeichen $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ multiplicirt mit $a + b$

$a^2b + 2ab^2 + b^3$

$a^3 + 2a^2b + ab^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Durch die Multiplication der obern Reihe $a^2 + 2ab + b^2$ mit dem zweyten Theil der Wurzel erhält man $a^2b + 2ab^2 + b^3$ und mit dem ersten Theil:

Theil: $a^3 + 2a^2b + ab^2$. Bey der Summirung dieser einzelnen Producte können $a^2b$ und $2a^2b$ als Größen einerley Art addirt werden, welches $3a^2b$ gibt. Ferner ist $2ab^2 + ab^2 = 3ab^2$; also besteht der Kubus von $a + b$ oder $(a + b)^3$ aus $a^3$ (dem Kubus des ersten Theils der Wurzel a); $3a^2b$ (dem dreyfachen Quadrat des ersten Theils a in den zweyten b); $3ab^2$ (dem dreyfachen ersten Theil a in das Quadrat des zweyten b) und endlich $b^3$ (dem Kubus des zweyten Theils der Wurzel b). Ebenfalls ersieht man aus dem hinzugefügten Beyspiel in Zahlen, daß $(20 + 4)^3 = 20^3 + 3.20^2.4 + 3.20.4^2 + 4^3$, welches man leicht durch die Multiplication prüfen kann. $24^3 = 24.24.24 = 13824$. Nun ist

$20^3 = 8000$
$3.20^2.4 = 4800$
$3.20.4^2 = 960$
$4^3 = 64$

$13824 = 24.24.24 = 24^3 = (20+4)^3$

## §. 67.

### Die Kubicwurzel aus einer gegebenen Zahl z. B. 949862087 zu ziehen.

1) Man theile die gegebene Zahl in Klassen von der rechten zur linken Hand. Jede Klasse erhalte 3 Ziffern. Denn zu jeder Zahl der Wurzel wer-

den

den drey Zahlen der Kubikzahl erfodert (§. 58); doch können in der letzten Klasse linker Hand oft weniger als 3 Ziffern seyn.

2) Zu der äußersten Klasse linker Hand 949 suche man in der Tafel (§. 58) die nächste Kubikzahl, deren Wurzel man an ihren Ort setzt. Man ziehe nun die Kubikzahl 729 ab und rücke zum Rest die folgende Klasse 862 herunter.

3) Man quadrire die gefundene Kubikwurzel 9 und multiplicire das Quadrat 81 mit 3, so erhält man den Divisor 243 der zweyten Klasse. Diesen Divisor schreibe man dergestalt, daß zwey leere Stellen linker Hand bleiben, und streicht ihn durch oder schließt ihn in eine Parenthese ein, damit er nicht zu den übrigen Zahlen addirt werde. Man untersucht nun, wie oft der Divisor im Reste und der heruntergerückten zweyten Klasse enthalten ist. Der Quotient 8 ist der zweyte Theil der Wurzel, welcher an seinen Ort hingeschrieben wird.

4) Man multiplicirt den zweyten Theil der Wurzel 8 mit dem Divisor und setzt das Product 1944 gerade unter den Divisor. Nun quadrirt man den zweyten Theil der Wurzel $8 = 64$, multiplicirt das Quadrat zuerst mit dem ersten Theil der Wurzel 9 und dies Product dann wieder mit

8, welches Product = 64. 9. 8 man dann dergestalt hinsetzt, daß nur Eine leere Stelle rechter Hand bleibt. Zuletzt setzt man den Kubus des zweyten Theils $8^3 = 512$ so hin, daß die übrige leere Stelle ausgefüllt wird.

5) Diese drey gefundenen Zahlen: 1944, 1728 und 512 werden addirt und die Summe 212192 von der Zahl 220862 subtrahirt; den Unterschied 8670 setzt man unten hin und rückt dazu die folgende Klasse 087 herunter.

6) Zu dieser Klasse findet man den Divisor, wenn man die gefundenen Theile der Wurzel als Einen Theil betrachtet, denselben quadrirt und das Quadrat 3 mal nimmt; also ist der Divisor $= 3 \cdot 98^2 = 28812$. Man findet nun den dritten Theil der Wurzel $= 3$; also $3 \cdot 28812 = 86436$, wozu noch ferner $3 \cdot 98 \cdot 3^2 = 2646$ und endlich $3^3 = 27$ kommt, wodurch die Summe 8670087 wird, welches von der obern Zahl subtrahirt keinen Rest gibt. Die Kubicwurzel ist also genau = 983.

7) Bleibt etwas übrig, so kann die Wurzel nicht genau gefunden werden; aber dadurch, daß man 3 Nullen anhängt, und diese Klasse nach den vorigen Regeln behandelt, nähert man sich der Wurzel in Zehntheilen; fügt man abermals

3 Nullen hinzu, so bekommt man Hundertheile u. s. w.

Beyspiel.

949 | 862 | 087 | 983 - A
729 | - - | - - | - - C

220862

Divisor (243)

1944 - - H
1728 - - I
512 - - K

212192

8670087

Divisor (28812)

86436 - - L
2646 - - M
27 - N

8670087

0

Beweis. Der Kubus von 983 muß dem Kubus von 900 + 80 + 3 gleich seyn. Man suche zuerst den Kubus der beyden ersten Theile, welcher aus folgenden Theilen bestehet. (§. 66).

1)

1) Aus dem Kubus des erſten Theils 900 = - - 729000000 = G

2) Aus dem dreyfachen Product des Quadrats des erſten Theils 900 in den zweyten Theil 80 = $3.900^2.80$ = - 194400000 = H

3) Aus dem dreyfachen Product des erſten Theils in das Quadrat des zweyten = $3.900.80^2$ = 17280000 = I

4) Aus dem Kubus des zweyten Theils 80 = - - 512000 = K

Darauf ſuche man den Kubus von 980 + 3 (§. 66), welcher beſtehet

1) Aus dem Kubus des erſten Theils, welcher bereits gefunden und = G+H+I+K iſt.

2) Dem dreyfachen Product des Quadrats des erſten Theils in den zweyten oder $3.980^2.3$ = 8643600 = L

3) Dem dreyfachen Product des erſten Theils in das Quadrat des zweyten = $3.980.3^2$ = 26460 = M

4) Dem Kubus des letzten Theils = $3^3$ = - - - 27 = N

Alſo der Kubus von 983 = 949862087 = G+H+I+K+L+M+N

Da nun nach den gegebenen Regeln die gegebene kubische Zahl in diese Theile aufgelöst ist, so müssen diese Regeln die richtige Methode zur Ausziehung der kubischen Wurzeln enthalten.

Anmerk. 1. Wenn man die Kubicwurzel durch Näherung finden will, so setzt man Klassen von Nullen hinzu, so daß drey Nullen zu jeder Klasse gehören.

67|000|000|4,061
64|

3000
(48)
00
00
0

3000000
(4800)
28800
4320
216

2923416

76584000
(494508)
494508
1218
1

49462981

27121019

Zu 67 sucht man die nächste Kubiczahl 64, welche man unter 67 schreibt und abzieht und die Kubicwurzel 4 an ihren Ort hinsetzt. Man quadrirt 4, multiplicirt das Quadrat mit 3 und erhält dadurch den Divisor 48, welchen man dergestalt hinschreibt, daß zwey leere Stellen rechter Hand bleiben. Dieser Divisor 48 ist 0 mal in 30 enthalten, folglich ist der Quotient 0, welches der zweyte Theil der Wurzel wird; alles übrige dieser Klas-

se

se ist 0. Zu der übrig gebliebenen Größe 3000 fügt man 3 Nullen hinzu, quadrirt 40, multiplicirt das Quadrat mit 3 und findet dadurch den Divisor dieser Klasse = 4800. Hinter dem Divisor bleiben zwey leere Stellen. 4 steckt in 30 sechs mal, wodurch man den dritten Theil der Wurzel in Hundertheilen erhält. Das Product 28800 schreibt man gerade darunter. Man quadrirt nun 6, multiplicirt es mit 3 mal 40 und erhält dadurch 4320, welche Zahl Eine Stelle weiter rechter Hand gesetzt wird. Zuletzt fügt man nach den Kubus von 6 = 216 hinzu. Wenn diese Größen addirt und subtrahiert werden, so ist diese Klasse fertig. Man kann nun noch abermals 3 Nullen hinzufügen, um eine neue Klasse zu erhalten. Diese wird auf dieselbe Weise behandelt.

Anmerk. 2. Folgende Tafel enthält die Quadrat- und Kubicwurzeln der einfachen Zahlen von 1 bis 10 in sieben Decimalen.

| Zahlen | Quadrat. | Kubicwurzeln |
|---|---|---|
| 1 | 1,0000000 | 1,0000000 |
| 2 | 1,4142136 | 1,2599205 |
| 3 | 1,7320508 | 1,4422496 |
| 4 | 2,0000000 | 1,5874011 |
| 5 | 2,2360680 | 1,7099759 |
| 6 | 2,4494897 | 1,8171206 |
| 7 | 2,6457513 | 1,9129312 |
| 8 | 2,8284271 | 2,0000000 |
| 9 | 3,0000000 | 2,0800837 |
| 10 | 3,1622777 | 2,1544347 |

Schulze hat in seiner Sammlung logarithmischer und anderer Tafeln II. Theil pag. 282—296 die Quadrat- und Kubicwurzeln aller Zahlen von 1 bis 1000 und ebenfalls Vega in seinen logarithmischen Tafeln pag. 370 angeführt.

Anmerk. 3. Man kann durch die bloße Addition Tafeln über die Quadrat- und Kubiczahlen verfertigen. Maurolici Arithmet. lib. I. pag. 15 und Tacquet. Arithmeticæ theoria et praxis pag. 338—343). Guldinus hat Tafeln über die Quadrat- und Kubiczahlen von 1 bis 10000 herausgegeben. (Guildin. de centro gravitatis lib. I. Append.). Im vollständigen mathematischen Lexicon 2ter Theil p. 1—85 findet man gleichfalls die Quadrate und Kubi aller Zahlen von 1 bis 10000 berechnet; ferner bey Schulze p. 282 — 296. II Theil. für die Zahlen von 1 bis 1000, ebenfalls bey Vega p. 362—369.

## §. 68.

Commensurable oder rationale Größen heißen diejenigen, welche sich durch ein Maaß ausmessen lassen; man kann sie also als ein Product einer andern Größe ansehen. So sind alle ganze Zahlen und alle bestimmte

bestimmte und endliche Brüche rationale Zahlen, weil jede ganze Zahl sich durch die Einheit und jeder endliche Bruch sich durch Theile der Einheit messen läßt (§. 25). Der Bruch $\frac{1}{7}$ ist sicherlich rational, obgleich er durch einen Decimalbruch nicht genau ausgedrückt werden kann, sondern $= 0{,}7142857142857142857$ u. s. w. ohne Ende ist (§. 55. 57). **Incommensurable** oder **irrationale Größen** sind solche, zu welchen es gar kein Maaß gibt. Sie lassen sich weder durch die Einheit noch durch Theile der Einheit ausmessen und entstehen nicht durch die Multiplication. Es ist vorhin bewiesen, daß wenn die Quadrat- oder Kubicwurzel einer ganzen Zahl keine ganze Zahl ist, es weder einen eigentlichen noch uneigentlichen Bruch gibt, der die Quadrat- oder Kubicwurzel dieser ganzen Zahl seyn kann (§. 63). Daher sind die Quadratwurzeln aller Zahlen zwischen 1 und 4, zwischen 4 und 9, zwischen 9 und 16, zwischen 16 und 25 u. s. w. irrational; z. B. $\sqrt{7}$ und $\sqrt{12}$; ferner sind die Kubicwurzeln aller Zahlen zwischen 1 und 8, zwischen 8 und 27, zwischen 27 und 64 u. s. w. irrational, z. B. $\sqrt[3]{5}$ und $\sqrt[3]{60}$ (§. 63). Durch Hinzufügung von Nullen kann man sich der Wurzel nähern (§. 65. 67) ohne sie indeß völlig zu erreichen, weil sie gar nicht genau existirt. So fällt die Quadratwurzel von 7 zwischen 2,6 und 2,64, noch näher zwischen 2,64 und

2,645 und noch näher zwischen 2,645 und 2,6457 u. s. w. Eben so ist $\sqrt[5]{5} = 1{,}7\ldots$; noch näher $= 1{,}709\ldots$; noch näher $= 1{,}7099\ldots$; noch näher $= 1{,}70997$ u. s. w. (§. 67).

## Siebentes Kapitel.

### Von den arithmetischen und geometrischen Verhältnissen und Proportionen.

#### §. 69.

Wenn zwey Größen in Absicht ihres Unterschiedes mit einander verglichen werden, so nennt man das ein **arithmetisches Verhältniß** (ratio arithmetica). Wenn z. B. 4 mit 10 verglichen wird in Absicht ihres Unterschiedes, daß nämlich 10 um 6 Einheiten größer ist als 4, so ist das ein arithmetisches Verhältniß, welches man so zu schreiben pflegt: $10 - 6$. Wenn zwey arithmetische Verhältnisse $10 - 4$ und $14 - 8$ gleichen Unterschied haben oder beyde Verhältnisse gleich groß sind, so ist das eine **arithmetische Proportion** und wird so geschrieben: $10 - 4 = 14 - 8$ und bedeutet, daß 10 eben so viel größer ist als 4 als 14 größer ist als 8. Die Größen, die zu beyden Seiten des Gleichheitszeichen

chen zuerst genannt werden, heißen die **Vorderglieder**, nämlich 10 und 14 und die, welche zuletzt genannt werden, die **Hinterglieder**, nämlich 4 und 8. Das erste und vierte Glied nennt man die **äußern**, nämlich 10 und 8; das zweyte und dritte aber die **mittlern Glieder**, nämlich 4 und 14. Wenn das zweyte Glied dem dritten gleich ist, so heißt das eine **stetige arithmetische Proportion** (proportio arithmetica continua); z. B. 4 — 7 = 7 — 10 oder 8 — 6 = 6 — 4.

§. 70.

In jedem arithmetischen Verhältniß findet man das Hinterglied, wenn man den Unterschied der Glieder entweder zum Vorderglede addirt oder davon subtrahirt. Wenn das Vorderglied kleiner ist als das Hinterglied z. B. im Verhältniß 5 — 8, so findet man den Unterschied der Glieder, wenn man das Vorderglied von dem Hinterglede subtrahirt, nämlich 8 — 5 = 3. Das Hinterglied ist also als ein Ganzes anzusehen, das Vorderglied als der eine Theil und der Unterschied als der andere Theil. Das Hinterglied ist also so groß als das Vorderglied und der Unterschied oder 8 = 5 + 3. Das Verhältniß 5 — 8 läßt sich daher auch so ausdrücken 5 — (5 + 3).

Ist das Vorderglied größer als das Hinterglied, wie im Verhältniß 20 — 8, so findet man den Un-

terſchied der Glieder, wenn man das Hinterglied von dem Vorderglied ſubtrahirt, nämlich 20 — 8 = 12. Das Vorderglied iſt alſo hier als das Ganze und das Hinterglied nebſt dem Unterſchiede als deſſen Theile anzuſehen und wenn man von dem Ganzen den einen Theil oder den Unterſchied ſubtrahirt, ſo erhält man den andern Theil oder das Hinterglied; alſo 20 — 12 = 8. Das Verhältniß 20 — 8. läßt ſich daher auch ſo ausdrücken: 20 — (20 — 12.)

## §. 71.

**In jeder arithmetiſchen Proportion iſt die Summe der beyden äußern Glieder der Summe der beyden mittlern Glieder gleich und in einer ſtetigen Proportion iſt die Summe der beyden äußern Glieder dem zwiefachen eines der mittlern Glieder gleich.**

1) In jedem arithmetiſchen Verhältniß iſt das Hinterglied dem um den Unterſchiede der Glieder vermehrten oder verminderten Vorderglied gleich. (§. 70). Iſt alſo 5 — 8 = 10 — 13, ſo iſt das zweyte Glied gleich dem erſten nebſt dem + oder — Unterſchiede und das vierte gleich dem dritten nebſt dem + oder — Unterſchiede. Daher beſteht die Summe der beyden äußern Glieder aus dem erſten und dem dritten Gliede nebſt dem + oder — Unterſchiede. Die Summe

der

beyden mittlern Glieder beſteht aus dem erſten Gliede, dem + oder — Unterſchiede und dem dritten Gliede. Da alſo die Summen der äußern und mittlern Glieder aus gleichen Größen beſtehen, ſo müſſen ſie auch gleich groß ſeyn.

2) Wenn die Proportion ſtetig iſt z. B. 4 — 9 = 9 — 14 ſo iſt die Summe der mittlern Glieder = 2. 9 und alſo dem Doppelten eines der mittlern Glieder gleich, nämlich 4 + 14 = 2. 9 = 9 + 9 = 18.

## §. 72.

1) **Zu drey gegebenen Zahlen die vierte arithmetiſche Proportionalzahl zu finden.** Die Zahlen ſind 3, 5, 2.

Man addire die zweyte und dritte Zahl und ſubtrahire von der Summe die erſte Zahl. Der Reſt gibt die vierte Proportionalzahl. Nämlich 5 + 2 — 3 = 4 und 3 — 5 = 2 — 4.

**Beweis.** Man nenne die vierte Proportionalzahl x, ſo iſt 3 — 5 = 2 — x und 3 + x = 5 + 2 und, wenn man auf beyden Seiten 3 ſubtrahirt, x = 5 + 2 — 3 = 4.

Wenn drey Zahlen eine ſtetige arithmetiſche Proportion ausmachen z. B. 8 — 6 = 6 — 4, ſo nennt man jede der mittlern Glieder die **mittlere arithmetiſche Proportionalzahl** zwiſchen 8 und 4 und die

Zahl 4 oder das letzte Glied die dritte arithmetische Proportionalzahl zu 8 und 6.

2) Die mittlere arithmetische Proportionalzahl zu zwey gegebenen Zahlen findet man, wenn man die gegebenen Zahlen addirt und davon die Hälfte nimmt. Denn $15 - x = x - 33$, also $2x = 15 + 33 = 48$ (§. 71); also wenn man auf beyden Seiten durch 2 dividirt, $x = \frac{48}{2} = 24$ und $15 - 24 = 24 - 33$.

3) Zu zwey gegebenen Zahlen 7 und 13 findet man die dritte arithmetische Proportionalzahl $= x$, wenn man die zweyte mit 2 multiplicirt und die erste davon subtrahirt. Denn $7 - 13 = 13 - x$; also $2.13 = 7 + x$ und $2.13 - 7 = x$; folglich $x = 19$ und $7 - 13 = 13 - 19$.

## §. 73.

Wenn zwey Zahlen 4 und 8 in Rücksicht ihrer Größe mit einander verglichen werden, wie oft nämlich die erste Zahl in der andern enthalten ist oder die andere enthält, so heißt diese Vergleichung ein geometrisches Verhältniß (ratio geometrica) und wird durch das Divisionszeichen zwischen den Zahlen bezeichnet, nämlich: $4 : 8$. Unter einem geometrischen Verhältniß denkt man sich daher nichts anders als einen Quotienten (§. 19. 20.) und $4 : 8$ ist $= \frac{4}{8}$. Der Quotient, welcher entsteht, wenn man das Vorderglied

vorglied durch das Hinterglied dividirt und eine ganze Zahl oder ein Bruch seyn kann, heißt der **Exponent** oder der **Name des Verhältnisses** (exponens oder Nomen rationis). Z. B. in 4 : 8 ist $\frac{4}{8}$ und in 12 : 3 ist $\frac{12}{3} = 4$ der Name des Verhältnisses oder die wirkliche Größe des Verhältnisses. Wenn zwey geometrische Verhältnisse gleich sind oder der Exponent in beyden gleich ist, so machen sie eine **geometrische Proportion** aus, welche durch das Gleichheitszeichen zwischen beyden Verhältnissen bezeichnet wird. Also: $3 : 9 = 5 : 15$ oder $\frac{3}{9} = \frac{5}{15}$. Mit Worten drückt man eine geometrische Proportion so aus: Wie sich das erste Glied zum zweyten verhält, so verhält sich das dritte zum vierten. Diejenige geometrische Proportion, in der alle vier Glieder verschiedene Größen oder Zahlen sind, heißt eine **discrete Proportion** z. B. $4 : 5 = 8 : 10$ und wenn eine geometrische Proportion nicht näher bestimmt wird, so versteht man immer eine solche. Ist aber das dritte Glied dem zweyten gleich, so nennt man das eine **stetige Proportion** (proportio continua) z. B. $2 : 10 = 10 : 50$. Wenn in der Mathematik davon die Rede ist, daß vier Größen eine Proportion ausmachen, daß z. B. die Cirkelflächen sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten, so ist das immer von der geometrischen nicht aber von der arithmetischen Proportion gemeint.

## §. 74.

**Wenn zwey Zahlen 3 und 6 mit einer und derselben Zahl 5 multiplicirt werden, so verhalten sich die Producte wie die multiplicirten Zahlen. Z. B. 3 : 6 = 3. 5 : 6. 5. Und wenn zwey Zahlen 20 und 8 mit einer und derselben Zahl 4 dividirt werden, so verhalten sich die Quotienten wie die dividirten Zahlen. Z. B. 20 : 8 = $\frac{20}{4}$ : $\frac{8}{4}$ = 5 : 2.**

1) Man denke sich das geometrische Verhältniß der Zahlen 3 : 6 als den Bruch $\frac{3}{6}$; werden nun der Zähler und Nenner dieses Bruchs mit der Zahl 5 multiplicirt, so entsteht dadurch ein Bruch, der dem vorigen gleich ist oder $\frac{3}{6} = \frac{3.5}{6.5}$ (§. 37). Wenn aber die Exponenten gleich sind, so sind die Zahlen in einer geometrischen Proportion (§. 73); also 3 : 6 = 3. 5 : 6. 5 oder die Producte verhalten sich wie die multiplicirten Zahlen.

2) Wenn man sich bey der Division das geometrische Verhältniß 20 : 8 = $\frac{20}{8}$ denkt und dieses uneigentlichen Bruchs Zähler und Nenner durch 4 dividirt, so wird dadurch der Werth des Bruchs nicht verändert und $\frac{20}{8}$ ist = $\frac{20:4}{8:4}$ (§. 29); folglich ist auch zwischen diesen Zahlen dasselbe geometrische Verhältniß und 20 : 8 = $\frac{20}{4}$ :

$\frac{10}{2} : \frac{4}{2} = 5 : 2$ (§. 73) oder die Quotienten verhalten sich wie die dividirten Zahlen.

## §. 75.

Hieraus folgt:

1) Wie sich die Ganzen verhalten, so verhalten sich auch die zwey-, drey-, vier- u. s. w. fachen Ganzen.

2) Wie sich die Ganzen verhalten, so verhalten sich auch die Hälften, Drittel, Viertel u. s. w.

3) Wenn 4 mit 8 multiplicirt wird und man denkt sich das Verhältniß der Einheit zum Multiplicator $= 1 : 4 = \frac{1}{4}$ und multiplicirt den Zähler und Nenner dieses Bruchs mit dem Multiplicandus 8, so ist $\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 8}{4 \cdot 8}$ (§. 37) oder $1 : 4 = 8 : 4 \cdot 8$ oder **der Multiplicandus verhält sich zum Product wie die Einheit zum Multiplicator.**

4) Wenn 60 durch 10 dividirt wird, so erhält man zum Quotienten 6. Man nehme das Verhältniß des Divisors zum Dividendus $= 10 : 60 = \frac{10}{60}$ (§. 73) und dividire Zähler und Nenner mit 10; so ist $\frac{10}{60} = \frac{10:10}{60:10} = \frac{1}{6}$; also $10 : 60 = 1 : 6$ oder **der Divisor verhält sich zum Dividendus wie die Einheit zum Quotienten.**

5) Zwi-

5) Zwischen der Wurzel 5, der Quadratzahl 25 und der Kubikzahl 125 ist ein stetiges geometrisches Verhältniß. Denn $\frac{5}{5.5} = \frac{5.5}{5.5.5}$; also $5 : 5.5 = 5.5 : 5.5.5$ oder $5 : 5^2 = 5^2 : 5^3$.

## §. 76.

1) Zwey gleiche Größen 8 und 4. 2 haben zu einer und derselben Größe 2 oder zu zwey andern gleichen Größen 12 und 4. 3 ein gleiches Verhältniß. Denn wenn zwey Größen $8 = 4.2$ durch eine und dieselbe Größe 2 oder durch zwey andere gleiche Größen $12 = 3.4$ dividirt werden, so müssen die Quotienten gleich seyn (§. 6. Grundsf. 4); also $\frac{8}{2} = \frac{4.2}{2}$ und $\frac{8}{12} = \frac{4.2}{4.3}$; folglich $8 : 2 = 4.2 : 2$ und $8 : 12 = 4.2 = 3.4$ (§. 73).

2) Umgekehrt, zwey Größen 6. 4 und 8. 3, welche zu einer dritten Größe 4 oder zu zwey andern gleichen Größen $3.2 = 4 + 2$ ein gleiches Verhältniß haben, sind unter sich selbst gleich.

Nach der Bedingung ist $6.4 : 4 = 8.3 : 4$ und $6.4 : 3.2 = 8.3 : 4 + 2$; also $\frac{6.4}{4} = \frac{8.3}{4}$ (§. 73) und $\frac{6.4}{3.2} = \frac{8.3}{4+2}$. Da nun in diesen gleich großen Brüchen die Nenner gleich sind; so

müssen

müssen es auch die Zähler seyn (§. 25.) und daher 6. 4 = 8. 3.

§. 77.

**Wenn zwey Verhältnisse einem dritten gleich sind, so sind sie unter sich gleich.** Z. B. 2 : 4 = 6 : 12 und 3 : 6 = 6 : 12, so ist 2 : 4 = 3 : 6 = 6 : 12 und $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{6}{12}$ also sind die beyden Brüche $\frac{2}{4}$ und $\frac{3}{6}$ dem dritten Bruche $\frac{6}{12}$ gleich, also unter sich gleich oder $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ (§. 6. Grundsz. 3). Also 2 : 4 = 3 : 6 (§. 73).

§. 78.

**Wenn vier Größen in einer geometrischen Proportion sind, so ist das Product der beyden äußern Glieder so groß, als das Product der beyden mittlern.** Ist 5 : 10 = 4 : 8, so ist 5. 8 = 10. 4.

Weil 5 : 10 = 4 : 8, so ist $\frac{5}{10} = \frac{4}{8}$ (§. 73) und wenn man auf beyden Seiten mit dem einen Nenner 8 multiplicirt, so hat man $\frac{5 \cdot 8}{10} = \frac{4 \cdot 8}{8} = 4$ (§. 43); ferner multiplicire man mit dem andern Nenner 10, so ist $\frac{5 \cdot 8 \cdot 10}{10} = 5 \cdot 8 = 4 \cdot 10$. Daher ist das Product der äußern Glieder dem Product der mittlern gleich.

In einer stetigen geometrischen Proportion ist daher das Product der äußern Glieder so groß als das Quadrat eines der mittlern Glieder oder wenn 3 : 9

=

$= 9 : 27$, so ist $9 \cdot 9 = 3 \cdot 27$ oder $9^2 = 3 \cdot 27$.

§. 79.

**Wenn zwey Producte $3 \cdot 12 = 4 \cdot 9$ gleich sind, so läßt sich aus diesen vier Größen eine geometrische Proportion machen, wenn man die beyden Factoren des einen Products zu den beyden äußern und die beyden Factoren des andern Products zu den beyden mittlern Gliedern macht.** Also: $3 \cdot 12 = 4 \cdot 9$, folglich $3 : 9 = 4 : 12$. Man dividire die beyden gleichen Producte $3 \cdot 12 = 4 \cdot 9$ durch 9, so ist $\frac{3 \cdot 12}{9} = \frac{4 \cdot 9}{9} = 4$ und dividirt man nun wieder durch 12, so ist $\frac{3 \cdot 12}{9 \cdot 12} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12}$ (§. 46); also $3 : 9 = 4 : 12$ (§. 73).

**Anmerk.** Hätte man das eine Product anders gestellt, so wäre eine andere aber dennoch richtige geometrische Proportion herausgekommen: $3 : 4 = 9 : 12$.

§. 80.

**Bey allen Veränderungen der Proportionen, bey welchen die Producte der äußern und mittlern Glieder gleich bleiben, bleibt auch eine Proportion zwischen den versetzten Gliedern.**

1) Wenn eine Proportion $3 : 9 = 4 : 12$ gegeben ist, so kann man auch durch **Umkehrung der Verhältnisse** (invertendo) schließen, wie sich

sich auf der einen Seite das Hinterglied zum Vorderglied verhält, so verhält sich auch auf der andern Seite das Hinterglied zum Vorderglied. Oder wenn $3 : 9 = 4 : 12$, so ist auch $9 : 3 = 12 : 4$; denn sowohl in dieser wie in jener Proportion sind die Producte der äußern und mittlern Glieder dieselben, in beyden $4 \cdot 9 = 3 \cdot 12$.

2) Durch Versetzung der Verhältnisse (commutando) d. h. daß man das letzte Verhältniß zuerst und das erste zuletzt setzt, wird die Proportion nicht verändert. Also wenn $2 : 4 = 6 : 12$, so ist auch $6 : 12 = 2 : 4$.

## §. 81.

Wenn vier Größen proportionirt sind, so sind sie auch noch durch Verwechselung der Glieder (alternando) proportionirt, d. h. wenn ich schließe: das Vorderglied zum Vorderglied, wie das Hinterglied zum Hinterglied. Oder wenn $4 : 12 = 8 : 24$, so ist auch $4 : 8 = 12 : 24$.

Da $4 : 12 = 8 : 24$ ist, so hat man $\frac{4}{12} = \frac{8}{24}$. Man dividire beyde Brüche durch 8, so ist $\frac{4}{12 \cdot 8} = \frac{8}{24 \cdot 8}$ (§. 46) $= \frac{1}{24}$ (§. 29.) und multiplicire darauf beyde mit 12, so wird $\frac{4 \cdot 12}{12 \cdot 8} = \frac{4}{8} = \frac{12}{24}$ (§. 43); also $4 : 8 = 12 : 24$.

§. 82.

Wenn diejenigen Größen, die eine Proportion ausmachen, von der Beschaffenheit sind, daß so wie die erste gegen die zweyte zu- oder abnimmt, auch die dritte gegen die vierte zu- oder abnimmt, so heißt dies eine **directe Proportion**. So ist die Proportion zwischen Waaren und deren Preisen. Z. B. 4 ℔ : 12 mß = 6 ℔ : 18 mß.

Wenn man sich ein geometrisches Verhältniß 2 : 8 denkt und dasselbe umkehrt 8 : 2, so ist das letzte das umgekehrte von ersterem (ratio inversa oder reciproca). Wenn die Natur der Sache erfodert, daß, wenn die eine Größe wächset, die andere abnimmt, oder wenn die erste abnimmt die zweyte wächset, so sind diese Größen in einem **verkehrten Verhältniß**. Wenn z. B. eine gleiche Wirkung von zwey ungleichen Kräften hervorgebracht werden soll, so gebraucht die größte Kraft die wenigste Zeit und die kleinste Kraft die meiste Zeit; diese Kräfte verhalten sich also nicht gerade sondern verkehrt wie die Zeiten.

§. 83.

**Wenn zwey Größen 4 und 12 sich verkehrt wie 48 : 16 verhalten d. h. 4 : 12 = 16 : 48, so wird das verkehrte Verhältniß sich durch ein directes Verhältniß von Brüchen, deren Nen-**

ner

ner = 1 sind, ausdrücken lassen. Nämlich 4 : 12 = $\frac{1}{4}$ : $\frac{1}{12}$.

Man dividire den Bruch $\frac{1}{4}$ durch $\frac{1}{12}$, so ist $\frac{1}{4}$ : $\frac{1}{12}$ = $\frac{12}{4}$. $\frac{16}{1}$ = $\frac{16}{4}$ (§. 45.) aber vermöge der Bedingung ist 4 : 12 = 16 : 48 oder $\frac{4}{12}$ = $\frac{16}{48}$; also ist auch $\frac{4}{12}$ = $\frac{1}{4}$ : $\frac{1}{12}$ (§. 6. Grundſ. 3.), und 4 : 12 = $\frac{1}{4}$ : $\frac{1}{12}$ (§. 73.).

## §. 84.

Wenn vier Größen eine geometrische Proportion ausmachen, so ist: 1) die Summe oder Differenz der Vorderglieder zu der Summe oder Differenz der Hinterglieder wie eins der Vorderglieder zu einem der Hinterglieder d. h. wenn 20 : 4 = 10 : 2, so ist 20 ± 10 : 4 ± 2 = 20 : 4 = 10 : 2. 2) Die Summe oder Differenz des ersten Vordergliedes und des ersten Hintergliedes zu der Summe oder Differenz des zweyten Vordergliedes und zweyten Hintergliedes, wie das erste Vorderglied zum zweyten Vordergliede oder das erste Hinterglied zum zweyten Hintergliede d. h. 20 ± 4 : 10 ± 2 = 20 : 10 = 4 : 2.

1) Vermöge der Bedingung ist 20 : 4 = 10 : 2, also 20. 2 = 4. 10 (§. 78). Zu diesen beyden gleichen Producten addire man oder subtrahire von denselben 20. 4 = 20. 4, so hat man 20. 4

$\pm$ 20. 2 = 20. 4 $\pm$ 4. 10 (§. 6. Grundſ. 4); aber 20. 4 $\pm$ 20. 2 und 20. 4 $\pm$ 4. 10 iſt eben ſo viel als 20 mit 4 $\pm$ 2 multiplicirt und 20 $\pm$ 10 mit 4; alſo (4 $\pm$ 2). 20 = (20 $\pm$ 10). 4. Löſet man dieſe Producte in eine Proportion auf, ſo erhält man 20 $\pm$ 10 : 4 $\pm$ 2 = 20 : 4 = 10 : 2. (§. 79).

2) 20 : 4 = 10 : 2, alſo 20. 2 = 4. 10. Dazu addire man oder ziehe davon ab entweder das Product der Vorder- oder der Hinterglieder 20. 10 = 20. 10, ſo iſt 20. 10 $\pm$ 20. 2 = 20. 10 $\pm$ 4. 10 oder (10 $\pm$ 2). 20 = (20 $\pm$ 4). 10; folglich 20 $\pm$ 4 : 10 $\pm$ 2 = 20 : 10 = 4 : 2.

## §. 85.

Hieraus folgt:

1) Wenn vier Größen eine geometriſche Proportion ausmachen 20 : 4 = 10 : 2, ſo verhält ſich die Summe oder Differenz des Vordergliedes und Hintergliedes auf der einen Seite zum Hintergliede wie die Summe oder Differenz des Vordergliedes und Hintergliedes auf der andern Seite zum Hintergliede. Oder 20 $\pm$ 4 : 4 = 10

$\pm$

$\pm$ 2 : 2. Denn 20 $\pm$ 4 : 10 $\pm$ 2 = 4 : 2 = 20 : 10 (§. 84. Num. 2); aber 20 : 10 = 4 : 2; also 20 $\pm$ 4 : 10 $\pm$ 2 = 4 : 2 (§ 77) und folglich durch Verwechselung (alternando) (§. 81) 20 $\pm$ 4 : 4 = 10 $\pm$ 2 : 2.

2) Wenn 4 Größen eine geometrische Proportion ausmachen 20 : 4 = 10 : 2, so verhält sich das Vorderglied zur Summe oder Differenz des Vordergliedes und Hintergliedes auf der einen Seite, wie das Vorderglied auf der andern Seite zur Summe oder Differenz des Vordergliedes und Hintergliedes d. h. 20 : 20 $\pm$ 4 = 10 : 10 $\pm$ 2; denn 20 $\pm$ 4 : 10 $\pm$ 2 = 20 : 10 (§. 84. Num. 2) und 20 $\pm$ 4 : 20 = 10 $\pm$ 2 : 10 (§. 81) und 20 : 20 $\pm$ 4 = 10 : 10 $\pm$ 2 (§. 80).

## §. 86.

Wenn mehrere geometrische Verhältnisse gleich sind, 2 : 3 = 4 : 6 = 8 : 12, so verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder wie eines der Vorderglieder zu einem der Hinterglieder oder 2 + 4 + 8 : 3 + 6 + 12 = 2 : 3. Weil 2 : 3 = 4 : 6, so ist 2. 6 = 3. 4 (§. 78); ferner 2 : 3 = 8 : 12, also 2. 12 = 3. 8. Zu diesen Producten addire man

2. 3. = 2. 5, so ist 2. 3 + 2. 6 + 2. 12 = 2. 5 + 3. 4 + 3. 8 und da 2 rechts und links ein Hauptfactor ist, so kann man diese Producte auch so ausdrücken: (3 + 6 + 12). 2 = (2 + 4 + 8). 3, daher 2 + 4 + 8 : 3 + 6 + 12 = 2 : 3 (§. 79).

## §. 87.

Wenn man zwey oder mehrere geometrische Proportionen hat 2 : 4 = 5 : 10 und 3 : 7 = 6 : 14 und 5 : 8 = 15 : 24 und die Vorderglieder mit den Vordergliedern und die Hinterglieder mit den Hintergliedern multiplicirt, so machen die herausgekommenen Producte auch eine geometrische Proportion aus d. h. 2. 3. 5 : 4. 7. 8 = 5. 6. 15 : 10. 14. 24.

Die erste Proportion gibt $\frac{2}{4} = \frac{5}{10}$ (§. 73); die zweyte $\frac{3}{7} = \frac{6}{14}$ und die dritte $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$ und wenn diese mit einander multiplicirt werden $\frac{2.3.5}{4.7.8} = \frac{5.6.15}{10.14.24}$ (§. 6. Grundsf. 4.) und also 2. 3. 5 : 4. 7. 8 = 5. 6. 15 : 10. 14. 24.

## §. 88.

Wenn eine Proportion 2 : 5 = 12 : 30 durch eine andere dividirt wird, d. h. die Vorderglieder durch die Vorderglieder und die Hinterglieder durch die Hinterglieder: so geben die Quotienten auch eine Proportion. Z. B. 2 : 5 =

12 : 30 und 3 : 9 = 2 : 6, also $\frac{2}{3} : \frac{6}{9} = \frac{12}{3} : \frac{30}{9} =$ 6 : 5.

In jeder der gegebenen Proportionen sind die Producte der äußern und mittlern Glieder gleich (§. 78); also 2. 30 = 5. 12 und 3. 6 = 9. 2. Dividirt man diese Producte durch einander, so erhält man $\frac{2.30}{9.6} = \frac{5.12}{9.2}$; aber das Product zweyer Zähler dividirt durch das Product zweyer Nenner ist das Product zweyer Brüche (§. 42); also $\frac{2.30}{9.6} = \frac{2}{9}. \frac{30}{6} = \frac{5}{9}. \frac{12}{2}$, welches gibt $\frac{2}{3} : \frac{5}{3} = \frac{12}{2} : \frac{30}{6}$ (§. 79).

## §. 89.

**Wenn die Glieder einer Proportion quadrirt oder kubirt werden, so geben die Quadrate oder Kubi auch eine Proportion.** Z. B. 1 : 2 = 4 : 8, so ist 1 : 4 = 16 : 64 und 1 : 8 = 64 : 512.

Wenn die erste Proportion mit sich selbst multiplicirt wird, so gibt das 1 : 2. 2 = 4. 4 = 8. 8 (§. 87) oder 1 : 4 = 16 : 64.

Wenn diese Proportion nochmals mit der ersten multiplicirt wird, so erhält man: 1 : 2. 2. 2 = 4. 4. 4 : 8. 8. 8 (§. 87) oder $1 : 2^3 = 4^3 : 8^3$.

## §. 90.

**Wenn man aus den Gliedern einer Proportion die Quadrat- oder Kubicwurzeln zieht, so**

geben diese Wurzeln auch eine Proportion. Z. B. $1 : 4 = 16 : 64$, so ist $\sqrt{1} : \sqrt{4} = \sqrt{16} : \sqrt{64}$ oder $1 : 2 = 4 : 8$.

Wenn die Glieder der gegebenen Proportion vollkommene Quadrate oder Kubi und folglich die Wurzeln rationale Zahlen sind (§. 68): so bestehen die Producte aus gleichen Factoren: $1 : 2 . 2 = 4 . 4 : 8 . 8$ und $1 : 2 . 2 . 2 = 4 . 4 . 4 : 8 . 8 . 8$.

Wenn die Proportion der Kubi durch die Proportion der Quadrate dividirt wird: $\frac{1}{1} : \frac{2 . 2 . 2}{2 . 2} = \frac{4 . 4 . 4}{4 . 4} : \frac{8 . 8 . 8}{8 . 8}$, so erhält man die Proportion der Wurzeln $1 : 2 = 4 : 8$ (§. 88).

Es seyen aber die Wurzeln irrational, wie in $2 : 3 = 4 : 6$ die Kubicwurzeln $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{6}$, so wollen wir annehmen, daß die Wurzeln keine Proportion ausmachen. Wenn diese nun kubirt werden, so entstehen die Kubi 2, 3, 4, 6, welche also auch keine Proportion ausmachen (§. 89), welches der Voraussetzung widerspricht.

## §. 91.

**Wenn zwey oder mehrere Proportionen von der Beschaffenheit sind, daß die Größe, welche in der einen das Hinterglied ist, das Vorderglied in der folgenden wird, so verhält sich das erste Vorderglied zum letzten Hintergliede auf der**

der einen Seite wie das erste Vorderglied auf der andern Seite zum letzten Hinterglied (ordinatim ex aequo proportionales).

Man setze die gegebenen Proportionen unter einander und multiplicire die Vorder- und Hinterglieder mit einander, so geben die Producte eine neue Proportion (§. 87).

1 : 2 = 3 : 6
2 : 4 = 6 : 12
4 : 12 = 12 : 36

1. 2. 4 : 2. 4. 12 = 3. 6. 12 : 6. 12. 36

Aber 1. 2. 4 : 2. 4. 12 = 1 : 12 (§. 74) und 3. 6. 12 : 6. 12. 36 = 3 : 36 (§. 74); also 1 : 12 = 3 : 36 (§. 77).

Anmerk. Weil man auf die Art mehrere Verhältnisse an einander reihen oder wie eine Kette von Schlüssen verbinden kann, so nennt man diese Rechnungsart die Kettenrechnung (regula catenaria). Es ist aus dem Beweise klar, daß ich auch so schließen kann: wie das erste Vorderglied zum letzten Hinterglied so das Product aller Vorderglieder zum Product aller Hinterglieder oder 1 : 12 = 3. 6. 12 : 6. 12. 36.

§. 92.

Wenn man zwey Proportionen hat, in welchen das Hinterglied in der obern das Vorderglied der untern auf der einen Seite ist und auf der andern Seite das erste Vorderglied das letzte Hinterglied ist: so verhält sich das erste Vorderglied zum letzten Hintergliede, wie das letzte Vorderglied zum letzten Hintergliede (perturbatim ex aequo proportionales).

Es seyen die der Bedingung gemäßen Proportionen

$$9 : 6 = 12 : 8$$
$$6 : 3 = 24 : 12$$

Diese Proportionen multiplicire man mit einander, so erhält man $9.6 : 6.3 = 12.24 : 8.12$ (§. 87) aber $9.6 : 6.3 = 9 : 3$ und $12.24 : 8.12 = 24 : 8$ (74); also $9 : 3 = 24 : 8$ (§. 77).

§. 93.

Wenn man sich mehrere zusammenhängende Proportionen denkt (§. 91), in welchen wenigstens auf der einen Seite das Hinterglied des einen Verhältnisses das Vorderglied des andern wird und man jedes Verhältniß durch ein anderes ausdrückt, wie

$$2 : 4 = 3 : 6$$
$$4 : 8 = 5 : 10$$
$$8 : 24 = 1 : 3$$
$$24 : 72 = 3 : 9$$

so

so sagt man, das Verhältniß 2 : 8 sey aus den beyden Verhältnissen 2 : 4 und 4 : 8 oder 3 : 6 und 5 : 10 zusammengesetzt (ratio composita). Eben so ist das Verhältniß 2 : 24 aus den drey Verhältnissen 2 : 4, 4 : 8 und 8 : 24 oder 3 : 6, 5 : 10 und 1 : 3 und das Verhältniß 2 : 72 aus den vier Verhältnissen 2 : 4, 4 : 8, 8 : 24 und 24 : 72 oder 3 : 6, 5 : 10, 1 : 3 und 3 : 9 zusammengesetzt.

Die Verhältnisse rechter Hand 3 : 6, 5 : 10, u. s. w. nennt man die einfachen oder zusammensetzenden Verhältnisse (rationes simplices oder componentes) zuweilen auch die Wurzeln des zusammengesetzten Verhältnisses (radices rationis compositae).

## §. 94.

**Wenn ein Verhältniß aus mehrern andern zusammengesetzt ist; z. B. 2 : 12 aus**

$$2 : 3 = 4 : 6$$
$$3 : 6 = 1 : 2$$
$$6 : 8 = 3 : 4$$
$$8 : 12 = 2 : 3$$

**so ist das zusammengesetzte Verhältniß 2 : 12 dem Verhältniß der Producte aus den einfachen Verhältnissen gleich.**

Multiplicirt man alle diese Verhältnisse mit einander, so ist 2. 3. 6. 8 : 3. 6. 8. 12 = 4. 1. 3. 2. : 6. 2. 4. 3 (§. 87); aber 2. 3. 6. 8 :

3. 6. 8. 12 = 2 : 12 (§. 74); also auch 4. 1. 3. 2 : 6. 2. 4. 3 = 2 : 12.

**Anmerk.** Einige drücken die Zusammensetzung des Verhältnisses 2 : 6 aus 4 : 6 und 1 : 2 so aus:

$$2 : 6 = \left\{ \begin{matrix} 4 : 6 \\ 1 : 2 \end{matrix} \right\}$$

und

$$2 : 8 = \left\{ \begin{matrix} 4 : 6 \\ 1 : 2 \\ 3 : 4 \end{matrix} \right\}$$

Ich glaube nicht, daß diese Bezeichnungsart irgend einen Vortheil gewähre; das erste Verhältniß läßt sich eben so bequem und deutlich 2 : 6 = 4. 1 : 6. 2 und das letzte 2 : 8 = 4. 1. 3 : 6. 2. 4 schreiben. (Kästner, Lorenz und andere drücken die zusammengesetzten Verhältnisse so aus: 2 : 6 = (4 : 6) + (1 : 2), 2 : 8 = (4 : 6) + (1 : 2) + (3 : 4), wobey man aber Verhältnisse wohl von Quotienten und Brüchen unterscheiden muß, weil nicht $\frac{2}{6} = \frac{4}{6} + \frac{1}{2}$ und $\frac{2}{8} = \frac{4}{6} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}$. Ich muß gestehen, daß diese Bezeichnungsart mir nicht zum besten gefällt und ich die des Verfassers vorziehe. Der Natur der Sache angemessener wäre es, die Zusammensetzung der Verhältnisse, entweder so wie der Verfasser thut, oder folgender Maaßen zu bezeichnen: 2 : 6 = (4 : 6).

(1 : 2) und 2 : 8 = (4 : 6). (1 : 2). (3 : 4). Hier wäre wieder $\frac{2}{8} = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{3} = \frac{4}{1 \cdot 2} = \frac{1}{3}$ und $\frac{2}{8} = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$ oder $\frac{1}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 4} = \frac{6}{24}$. Ueberf.)

## §. 95.

Wenn ein Verhältniß auf die Art aus mehrern einfachen Verhältnissen zusammengesetzt ist, daß diese zusammensetzenden Verhältnisse alle dieselben sind, so heißt dies zusammengesetzte Verhältniß ein **vervielfachtes Verhältniß** (ratio multiplicata). Z. B. das Verhältniß 3 : 243 ist ein vervielfachtes Verhältniß von 1 : 3.

3 : 9 = 1 : 3
9 : 27 = 1 : 3
27 : 81 = 1 : 3
81 : 243 = 1 : 3

Wenn ein Verhältniß zweyer Größen aus einem zweymal genommenen andern Verhältniß zusammengesetzt ist, so nennt man das ein **verdoppeltes** oder **zwiefaches Verhältniß** (ratio duplicata). So ist 3 : 27 das verdoppelte Verhältniß von 1 : 3, weil 3 : 27 = 1. 1 : 3. 3. Hieraus ersieht man zugleich, daß, wenn zwey Größen im zwiefachen Verhältniß zweyer andern sind, die beyden ersten sich zu einander verhalten wie die Quadrate der letztern. Nämlich $3 : 27 = 1^2 : 3^2$.

Wenn

Wenn ein Verhältniß zweyer Größen aus einem dreymal genommenen andern Verhältniß zusammengesetzt ist, so nennt man dies ein **dreyfaches Verhältniß** (ratio triplicata). So ist $3 : 81 = 1.1. 1 : 3.3.3$, woraus folgt, daß, **wenn zwey Größen im dreyfachen Verhältniß zweyer andern sind, erstere sich wie die Kubi der letztern verhalten.** Nämlich $3 : 81 = 1^3 : 3^3$.

**Anmerk.** Alle vorhergehende Lehrsätze sind in Zahlen bewiesen; weil aber diese Beweise sich auch auf andere Zahlen anwenden lassen, so sind sie allgemein wahr und, wie ich hoffe, für den Anfänger faßlich. Man kann aber diese Beweise in Zahlen leicht in Beweise mit Buchstaben verändern, welche allgemeine Zeichen der Größen sind. Als ein Beyspiel will ich hier den Lehrsatz §. 88 in Buchstaben beweisen. Wenn $a : b = c : d$ und $e : f = g : h$, so ist $\frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{c}{g} : \frac{d}{h}$. Weil $a : b = c : d$, so ist $a.d = b.c$ (§. 78), ferner weil $e : f = g : h$, so ist $e.h = f.g$. Dividirt man diese gleichen Producte durch einander, so ist $\frac{a.d}{e.h} = \frac{b.c}{f.g}$ (§. 6. Grundf. 4), welches man nach den Regeln

Regeln der Multiplication der Brüche wieder so aufgelöſen kann: $\frac{a}{e} \cdot \frac{d}{h} = \frac{b}{f} \cdot \frac{c}{g}$ (§. 42)

und hieraus folgt, daß $\frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{c}{g} : \frac{d}{h}$ (§. 79).

## §. 96.

**Zu zwey gegebenen Größen a und c oder 3 und 12 die mittlere geometriſche Proportional-Größe zu finden.**

Man multiplicire die erſte Größe a oder 3 mit der zweyten c oder 12 und ziehe aus dem Product a. c oder 36 die Quadratwurzel $= \sqrt{a. c}$ oder $\sqrt{36} = 6$ (§. 58), welches die geſuchte Größe iſt; denn

| | |
|---|---|
| $a : b = b : c$ (§. 73) | $3 : b = b : 36$ |
| $a. c. = b^2$ (§. 78) | $36 = b^2$ |
| $\sqrt{a. c.} = b$ (§. 59) | $\sqrt{36} = 6 = b$ |

## §. 97.

**Zu zwey gegebenen Zahlen a und b oder 3 und 9 die dritte geometriſche Proportionalzahl c zu finden.**

Man quadrire b oder 9 und dividire das Quadrat $b^2$ oder 81 durch die erſte Zahl a oder 3, ſo erhält man

man zum Quotienten $\frac{b^2}{a}$ oder $\frac{81}{3} = 27 = c$ die gesuchte Zahl; denn

| | |
|---|---|
| a : b = b : c (§. 73) | 3 : 9 = 9 : c |
| a. c = $b^2$ (§. 78) | 3. c = 81 |

$c = \frac{b^2}{a}$ (§. 6 Grundf. 4) $c = \frac{81}{3} = 27$

## §. 98.

Zu drey gegebenen Zahlen a, b, c oder 4, 6, 20 die vierte geometrische Proportionalzahl d zu finden.

Man multiplicire die zweyte Größe b oder 6 mit c oder 20 und dividire durch a oder 4, so ist der Quotient $\frac{b.c}{a}$ oder $\frac{6.20}{4} = 30 = d$ die gesuchte Zahl, denn

| | |
|---|---|
| a : b = c : d | 4 : 6 = 20 : d |
| b. c = a. d. (§. 78) | 6. 20 = 4. d |

$\frac{b.c}{a} = d$ (§. 6 Grundf. 4) $\frac{6.20}{4} = \frac{120}{4} = 30 = d.$

# Achtes Kapitel.

## Von der Regula Detri.

### §. 99.

Die Regula Detri ist nichts anders als eine richtige Anwendung des letzten Lehrsatzes: zu drey gegebenen Zahlen die vierte Proportionalzahl zu finden (§. 98). Die Regula Detri kann in allen Fällen angewandt werden, wo geometrische Proportionen Statt finden, welches man aber nicht nach der Arithmetik sondern aus der Natur der Sache untersuchen und beurtheilen muß. So wachsen Preise und Ausgaben im Verhältniß der Menge der eingekauften Waaren; Arbeitslohn im Verhältniß entweder der Menge der Arbeit oder der Zeit, welche die Arbeit erfodert. Bey gleichen Zeiten verhalten sich die Wirkungen wie die wirkenden Ursachen; bey gleichen Kräften aber verhalten sich die Wirkungen wie die Zeiten. In diesen und andern Fällen läßt sich die Regula Detri anwenden. Wenn man weiß, daß ein Körper in der ersten Sekunde $15\frac{1}{2}$ Fuß fällt und wollte daraus schließen, daß er in vier Sekunden 4 mal so tief oder 62 Fuß fallen müßte, so würde man sehr irren, weil die zurückgelegten

Räume ſich nicht wie die Zeiten verhalten, ondern (dies beweiſet die Mathematik) wie die Quadrate der Zeiten. Wenn man weiß, daß aus einem Loche im Boden eines Gefäſſes, welches nicht voll gehalten wird, in Einer Minute 20 Flaſchen Waſſer herauslaufen, und man wollte daraus den Schluß ziehen, daß in zwey Minuten 40 und in 3 Minuten 60 Flaſchen herausſtrömen müßten: ſo würde man abermals irren. Es läuft im Gegentheil immer weniger Waſſer heraus und zwar im Verhältniß der Quadratwurzel aus der Höhe des noch übrigen Waſſers. Die Regeln, nach welchen dies beſtimmt werden kann, muß man aus der Hydraulik erlernen.

§. 100.

Wenn die geſuchte Größe von der Art iſt, daß ſo wie die erſte Zahl gegen die zweyte zu- oder abnimmt, auch die dritte gegen die vierte zu- oder abnimmt, ſo nennt man das die directe Regula Detri. Wenn eine Frage mit einer größern Zahl auch eine Antwort mit einer größern Zahl oder eine Frage mit einer kleinern Zahl auch eine Antwort mit einer kleinern Zahl erfodert, ſo gehört in beyden Fällen die Aufgabe zur directen Regula Detri. Z. B. 2 ℔ koſten 9 ℳ, was koſten 20 ℔? Hier erfodert die Frage mit einer größern Zahl (20 ℔) auch eine Antwort mit einer größern Zahl (90 ℳ). Ferner 50 ℔ koſten 150 ℳ, was

koſten

kosten 2 ℔? Hier erfodert die Frage mit einer kleinern Zahl (2 ℔) auch eine Antwort mit einer kleinern Zahl (6 xr) als der gegebene Preis 150 xr. Da die durch die Regula Detri gesuchte Größe die vierte Proportionalgröße ist (§. 99), so können die Aufgaben der Regula Detri auf eine dreyfache Weise aufgelöst werden.

1) Man multiplicire das zweyte Glied mit dem dritten und dividire durch das erste (§. 98).

3 Ellen : 9 xr = 6 Ellen : x xr

6

3) 54 (18 xr

0

Denn $\frac{9 \cdot 6}{3} = \frac{54}{3} = 18$ xr (§. 98).

2) Man dividire das zweyte Glied durch das erste und multiplicire den Quotienten mit dem dritten.

3 Ell. : 9 xr = 6 Ell. : x xr

3) 9 (3
6

18 xr

Denn $\frac{9 \cdot 6}{3}$ ist die vierte Proportionalzahl (§. 98). Aber $\frac{9 \cdot 6}{3}$ kann auch als $\frac{9}{3}$. 6 oder als ein Pro-

duct aus dem Bruche $\frac{2}{3}$ in die Zahl 6 angesehen werden (§. 43); also findet man die vierte Proportionalzahl auch, wenn man das zweyte Glied durch das erste dividirt und mit dem dritten multiplicirt.

3) Man dividire das dritte durch das erste und multiplicire den Quotienten mit dem zweyten.

3 Ell. : 9 ℳ = 6 Ell. : x ℳ

3) 6 ( 2
       9

18 ℳ

Denn $x = \frac{9 \cdot 6}{3}$ welchen Bruch man aber auch so schreiben kann: $9 \cdot \frac{6}{3}$ (§. 43); also kann man auch das dritte Glied durch das erste dividiren und mit dem zweyten multipliciren. Die erste Methode ist die gewöhnlichste, doch kann man oft mit Vortheil die zweyte und dritte gebrauchen.

Beyspiel. 1. Für 49 ℳ kauft man 56 ℔ Taback, wie viel ℔ kann man für 14 ℳ kaufen? 49 ℳ : 56 ℔ = 14 ℳ : x ℔; also $x = \frac{14 \cdot 56}{49} = \frac{784}{49} = 16$ ℔.

Beyspiel. 2. 4 Ellen kosten 1 ℳ, was kosten 100 Ellen? 4 Ellen : 1 ℳ = 100 Ellen : x ℳ; also $\frac{1}{4} \cdot 100 = \frac{100}{4} = 25$ ℳ, woraus man ersiehet,

daß

daß wenn 1 in der Mitte steht, man nur das dritte Glied durch das erste zu dividiren braucht.

**Beyspiel.** 3. Ein Landmann gebraucht zu seinen Pferden wöchentlich 7 Scheffel Haber; wie viel gebraucht er während der Zeit, daß er auf dem Stalle futtert d. h. in 26 Wochen? 1 Woche : 7 Scheffel = 26 Wochen : x Scheffel; also $x = \frac{26}{1} \cdot 7 = \frac{182}{1} = 182$. Wenn also die erste Zahl 1 ist, so hat man nur nöthig die dritte mit der zweyten zu multipliciren.

**Anmerk.** So wie man gewöhnlich die Glieder der Regula Detri ordnet: 5 Ellen kosten 8 xr. was kosten 100 Ellen? oder 5 Ellen : 8 xr = 100 Ellen : 160 xr, scheint die Proportionalität wegzufallen, weil zwischen 5 Ellen und 8 xr und zwischen 100 Ellen und 160 xr eigentlich kein Verhältniß Statt finden kann. Wenn man aber alternirt, so ist 5 Ellen : 100 Ellen = 8 xr : 160 xr, woraus man ersieht, daß dasselbe Verhältniß, welches zwischen 5 Ellen und 100 Ellen oder den Quantitäten der Waaren besteht, auch zwischen ihren Preisen 8 xr und 160 xr Statt findet. Noch ein Zweifel kann einem bey der Regula Detri aufstoßen, nämlich daß, wenn das dritte Glied mit

dem zweyten multiplicirt und durch das erste dividirt wird $\frac{8 \text{ ℔.} \quad 100 \text{ Ellen}}{5 \text{ Ellen}} = 160$ ℔, man mit benannten Zahlen multiplicirt und dividirt habe. Es ist allerdings kein Verstand darin, und es kann kein Product geben, wenn man 8 ℔ 100 Ellen Mal zu sich selbst addirt (§. 24) und eben so ungereimt ist es, 8 ℔ durch 5 Ellen zu dividiren, weil 5 Ellen unmöglich in 8 ℔ enthalten seyn kann, da beyde Größen von ganz verschiedener Art sind. Diese Schwierigkeit läßt sich so heben: Wenn man die Glieder der Regula Detri aufsetzt und untersucht, ob die Proportionalität hier anwendbar ist, so denkt man sich die Zahlen als benannte Zahlen; sobald aber das Exempel richtig angesetzt ist, und man zur Ausrechnung schreitet, so betrachtet man während der ganzen Berechnung und Auflösung die Zahlen als unbenannte Größen und daher liegt in der Multiplication und Division der Glieder nichts Ungereimtes mehr. Daß dies seine Richtigkeit habe, erhellt daraus, daß alle Beispiele, bey welchen dieselben Zahlen vorkommen, auf dieselbe Art berechnet werden, obgleich die Benennung verschieden ist. Z. B.

5 Mann

5 Mann bekommen täglich 8 Flaschen Bier, wie viel müssen 100 Mann haben? Antwort: $\frac{8 \cdot 100}{5} = 160$ Flaschen, welches im ersten Exempel 160 ℔ war. Hieraus ersieht man, daß man nicht eigentlich mit benannten Zahlen rechnet, sondern die Benennung nur zur Ansetzung des Exempels und zur Benennung der Antwort, ob es nämlich ℔ oder Flaschen sind, dient.

## §. 101.

Bey der Regula Detri lassen sich zur leichtern und geschwindern Auflösung der Aufgaben verschiedene Abkürzungen und andere Vortheile anwenden, von welchen die wichtigsten nebst den practischen Handgriffen folgende sind:

1) Man multiplicirt das zweyte Glied der Proportion mit dem dritten oder, wie man zu sagen pflegt, das mittlere Glied mit dem hintern, wenn dieses nur zwey Zahlen hat oder nicht die Ordnung der Hunderte überschreitet, in welchem Falle man dasselbe in solche Theile theilet, mit welchen die Multiplication leicht vorgenommen werden kann. Z. B.

1 Elle: 1 ℛ 2 ℳ 0 ß 3 ₰ = 17 Ellen

8

13 ℛ 1 ℳ 2 ß 0 ₰ 8.2 + 1

2

26 ℛ 2 ℳ 4 ß 0 ₰

1 . 2 . 0 . 3 ₰

28 ℛ 1 ℳ 4 ß 3 ₰

Da es schwerer ist mit der größern Zahl 17 zu multipliciren, so kann man dieselbe wo möglich in Factoren theilen, und 17 = 8 . 2 + 1 setzen. Man multiplicirt nun das mittlere Glied mit dem einen Factor 8 und dieses Product wieder mit dem zweyten Factor 2, so ist 26 ℛ 2 ℳ 4 ß 0 ₰ das Product von 1 ℛ 2 ℳ 0 ß 3 ₰ in 8 . 2 = 16. Aber 17 = 8 . 2 + 1, also muß man zu obigem Product noch 1 ℛ 2 ℳ 0 ß 3 ₰ addiren, wodurch man die gesuchte Zahl 28 ℛ 1 ℳ 4 ß 3 ₰ erhält.

2) Uebersteigt das Hinterglied die Ordnung der Hunderte, so ist es am kürzesten, dasselbe mit dem mittlern zu multipliciren. Hat dieses aber Theile von kleinerer Benennung, so muß man dasselbe zerstreuen oder in aliquote Theile zerlegen. Z. B.

3 ß

3 ℔ : 1 mg 10 ßß 4 ℔ = 789 ℔

$(1\frac{1}{2}$ $(8\frac{1}{2}$ $2\frac{1}{4}$ $(4\frac{1}{8}$

263 ℳ
131 • 24 ßß
32 • 42 •
5 • 23 •

3 ) 432 ℳ 41 ßß

144 ℳ 13 ßß 8 ℔

Wenn ein Zahl 789 mit einer benannten Zahl, die in kleinere Theile oder Benennungen getheilt ist, z. B. mit 1 mg 10 ßß 4 ℔ multiplicirt werden soll, so könnte man diese zu Pfenningen machen und mit diesen multipliciren, welches aber gar zu weitläuftig seyn würde. Mit 1 mg 10 ßß 4 ℔ multipliciren heißt nichts anders als mit Brüchen von Reichsthaler, Brüchen von Mark und Brüchen von Schillingen (§. 25) multipliciren Um diese Rechnung mit Brüchen so leicht und einfach als möglich zu machen, müssen die Zahlen in Brüche zerlegt werden, deren Zähler 1 sind, weil dann die Multiplication mit ihnen allein darin besteht, daß man den Multiplicandus durch ihre Nenner dividirt (§. 43). So ist 1 mg = $\frac{1}{2}$ ℳ, 10 ßß = 8 ßß + 2 ßß = $\frac{1}{2}$ mg + $\frac{1}{4}$ ($\frac{1}{2}$ mg) d. h. die Hälfte von 1 mg und ein Viertel von 8 ßß oder $\frac{1}{2}$ mg und die 4 ℔ nimmt

man aus 2 ß oder 24 ₰ und erhält dadurch $\frac{1}{3}$. Nun soll also 789 mit 1 m̃ = $\frac{1}{3}$ ℳ multiplicirt werden, d. h. man dividirt 789 durch 3 und erhält auf die Art 263 ℳ; diese Zahl soll nun mit 10 ß multiplicirt d. h. durch 2 und diese wieder durch 4 dividirt werden. Das gibt 131 ℳ 24 ß und 32 ℳ 42 ß. Hievon nimmt zuletzt den sechsten Theil = 5 ℳ 23 ß, addirt alle diese Theile und bekommt in der Summe 432 ℳ 41 ß das Product des hintern Gliedes in das mittlere, welches nun nur noch durch 3 zu dividiren ist. Der Quotient 144 ℳ 13 ß 8 ₰ ist der gesuchte Preis von 789 ℔, wenn 3 derselben 1 m̃ 10 ß 4 ₰ kosten.

3) Wenn das Hinterglied eine höhere Benennung hat als das Vorderglied, so muß man dasselbe mit diesem auf gleiche Benennung bringen, ehe man die Multiplication beyder Theile vornimmt. Z. B.

1 Tonne : 2 m̃ 10 ß = 10 last 7 Tonnen

$$\left(\begin{matrix} 8\frac{1}{2} \\ 2\frac{1}{4} \end{matrix}\right. \quad \begin{matrix} 20 \\ \hline 207 \\ 2 \\ \hline 414 \text{ m̃} \\ 103 \cdot 8 \text{ ß} \\ 25 \cdot 14 \cdot \\ \hline 543 \text{ m̃ } 6 \text{ ß} \end{matrix}$$

Die

Die 10 Last macht mit 20 zu Tonnen, weil die Last = 20 Tonnen ist. Das Uebrige ist wie Num. 2, nur daß 2 m℔ nicht zerstreuet worden sind, weil man das Resultat in m℔ haben wollte.

4) Das erste Glied muß auf die kleinste Benennung, in welcher es ausgedrückt ist, gebraucht werden, aber auch nicht auf eine noch kleinere, um Divisionen mit gar zu großen Zahlen zu vermeiden.

1 ℔ 1 Unz. : 328 ℛ 1 m℔ = 1 Loth 3 Quent. 3 Ort.

16
17 Unz.

164 ℛ 8 ß ($\frac{1}{2}$ $2\frac{1}{2}$ $2\frac{1}{2}$ / $1\frac{1}{2}$ $1\frac{1}{2}$)
82 = 4 =
41 = 2 =
20 = 25 =
10 = 12 = 6 ℒ

17) 318 ℛ 3 ß 6 ℒ

18 ℛ 34 ß 1 ℒ

Man bringe das erste Glied 1 ℔ 1 Unz. auf die kleinste Benennung, die es selbst hat, nämlich zu 17 Unz. und die Frage ist, wenn 17 Unz. 328 ℛ 1 m℔ kosten, was kosten alsdann 1 Loth 3 Qv. 3 Ort? Wenn nun das letzte Glied, wie in diesem Falle hier, klein ist und aus mehrern Größen von kleinern Benennungen besteht, so wird die Multiplication des mittlern und hintern Gliedes dadurch erleichtert, daß man das hin-

tere

tere Glied aus dem vordern zerstreuet und 528 ℔ 1 ʒ mit diesen leichten Brüchen multiplicirt.

5) Nachdem das Vorderglied auf seine kleinste Benennung gebracht ist (Num. 4), so zerstreuet man alles im Hinterliede, was von kleinerer Benennung ist, in Theile eines Ganzen von der kleinsten Benennung des Vordergliedes (Num. 2). Z. B.

100 Last : 458 ℔ 24 ß = 16 Last 12 Scheffel 2 Viert.

8 | 8,2 | $10\frac{1}{7}$ | $2\frac{1}{7}$

$2\frac{1}{2}$

3668 ℔

2

7336 ℔

152 • 40 ß

30 • 27 • $2\frac{2}{7}$ ♀

7 • 30 • $9\frac{1}{2}$ •

7527 ℔ 2 ß 0 ♀

75 ℔ 13 ß

6) Wenn das Vorder- und mittlere Glied oder das Vorder- und Hinterglied sich durch eine und dieselbe Zahl dividiren lassen, so erhält man dadurch kleinere Zahlen.

60 Last : 24 xℓ 18 ß = 100 Last 10 Scheffel

10 . 4 xℓ 3 ß . 4 . $10\frac{1}{2}$

$3\frac{1}{16}$ ) 400 xℓ

6 • 12 ß

1 • 17 •

) 407 xℓ 29 ß

40 xℓ $36\frac{1}{2}$ ß

Man sieht gleich auf den ersten Blick, daß 60 Last und 24 xℓ 18 ß sich durch 6 dividiren lassen und daß es dann hier auf folgende Frage ankomme: 10 Last kosten 4 xℓ 3 ß, was kosten 100 Last?

7) Das Vorder- und mittlere Glied lassen sich gegen einander abkürzen. Z. B. 16 ℔ kosten 20 xℓ, was kosten 100 ℔? oder 16 : 20 = 100 : x; also, wenn man 16 und 20 durch 4 dividirt, $\frac{16}{4} : \frac{20}{4} = 100 : x$ (§. 74) oder 4 : 5 = 100 : x und $x = \frac{5 \cdot 100}{4} = 125$ xℓ. Ferner kann man das Vorder- und Hinterglied gegen einander abkürzen. Denn aus der gegebenen Proportion 16 : 20 = 100 : x kann man schließen 16 : 100 = 20 : x (§. 80) und, wenn man durch 4 dividirt, $\frac{16}{4} : \frac{100}{4} =$ 4 : 25 = 20 : x (§. 74) und $x = \frac{25 \cdot 20}{4} =$ $\frac{500}{4}$.

$\frac{500}{4} = 125$ ℔. Aber das mittlere und hintere Glied lassen sich nicht gegen einander abkürzen, denn wenn man diese dividirt, so behält man nicht dieselbe Proportion. Es sey die Proportion $16 : 20 = 100 : x$ gegeben, so würde es irrig seyn, wenn man schließen wollte $16 : \frac{20}{4} = \frac{100}{4} : x$ oder $16 : 5 = 25 : x$, weil $x = \frac{5 \cdot 25}{16} = \frac{125}{16} = 7\frac{13}{16}$ ℔ seyn würde.

## §. 102.

Die verkehrte Regula Detri (regula trium inversa) findet in solchen Fällen Statt, wo die Natur der Sache es erfodert, daß, wenn die eine Größe wächset, die andere abnimmt, oder, wenn die eine abnimmt, die andere wächset. Wenn die Frage mit einer größern Zahl eine Antwort mit einer kleinern oder die Frage mit einer kleinern Zahl eine Antwort mit einer größern Zahl erfodert: so gehört die Aufgabe zur verkehrten Regula Detri. Z. B. 12 Leute verzehren einen gewissen Vorrath in 15 Tagen, in welcher Zeit wird derselbe Vorrath von 20 Leuten verzehrt? Da nun 20 Menschen denselben Vorrath nothwendig in kürzerer Zeit verzehren als 12 Menschen, so fragt man mit einer größern Zahl (20) und die Antwort muß dennoch eine kleinere Zahl (weniger als 15 Tage) geben. Die Art der Auflösung kann man durch folgende

gende Schlüsse finden. Der Vorrath, von welchem 12 Menschen 15 Tage zehren können, wird Einen Menschen 12 mal länger ernähren d. h. 12. 15 = 180 Tage; aber der Vorrath, womit Ein Mensch 180 Tage ausreicht, kann 20 Menschen nur den zwanzigsten Theil der Zeit ernähren, d. h. $\frac{180}{20}$ = 9 Tage.

Aufgaben, welche zur verkehrten Regula Detri gehören, lassen sich auf eine doppelte Weise auflösen.

1) Man setze die Aufgabe so auf, als wenn sie zur directen Regula Detri gehörte: 12 Mann: 15 Tage = 20 Mann. Man sieht aber gleich ein, daß man nach diesem Aufsatze mehr Tage als zuvor erhalten würde, welches doch unmöglich ist. Das Beispiel gehört also zur verkehrten und nicht zur directen Regula Detri. **Man kehre also den Aufsatz um und rechne dann nach der gewöhnlichen Weise.**

20 Mann : 15 Tage = 12 Mann

15

60

12

20 ) 180 ( 9 Tage

2) Man könnte auch den Aufsatz nach der directen Regel stehen lassen: 12 : 15 = 20 : x und x dadurch finden, daß man das Vorderglied

12 mit dem mittlern 15 multiplicirte und durch das hintere 20 dividirte; folglich $x = \frac{15 \cdot 12}{20} = \frac{180}{20} = 9$.

**Erstes Beyspiel.** 800 Soldaten liegen in einer Stadt, die eine Belagerung besorgt, und haben Vorrath auf 2 Monate; wie viele Soldaten kann die Festung behalten, wenn dieser Vorrath 5 Monate vorhalten soll?

2 Monat : 8000 Mann = 5 Monat.

2

5 ) 16000

3200 Mann.

**Zweytes Beyspiel.** Wie groß muß das Kapital seyn, welches in 32 Monaten eben so viel Zinsen gibt als 5000 ℔ in 5 Monaten?

5 Monat : 5000 ℔ = 32 Monat.

5

32 ) 25000

$781\frac{1}{4}$ ℔

**Drittes Beyspiel.** 12 Leute vollenden eine gewisse Arbeit in 30 Tagen, wie viel Arbeiter müssen angestellt werden, damit eben dieselbe Arbeit in 8 Tagen fertig werde?

30 Tage : 12 Mann :: 8 Tage

30

8 ) 360

45 Arbeiter.

§. 103.

Durch die zusammengesetzte Regula Detri (regula composita) löset man solche Aufgaben auf, bey welchen es mehr als 3 Proportionsglieder gibt. Nach der Anzahl dieser Glieder bekommt die Regel ihren Namen. Die Regel mit Fünfen (regula de quinque) lehrt zu fünf Zahlen die sechste unter der Bedingung finden, daß die fünfte zur sechsten im zusammengesetzten Verhältniß der ersten zur zweyten und der zweyten zur dritten ist (§. 94). Es ist also klar, daß die Regel mit Fünfen aus zwey einfachen oder besondern Proportionen besteht. Lassen sich diese nach der directen Regel auflösen (§. 101), so heißt dies die directe Regel mit Fünfen; müssen sie aber nach der verkehrten Regel (§. 102) berechnet werden, die verkehrte Regel mit Fünfen.

Beyspiel der directen Regel mit Fünfen.

Erstes Beyspiel. 8 Personen verzehren jährlich 6 Tonnen Rocken, wie viel können nach demselben Verhältniß 12 Personen in vier Jahren verzehren?

Man ersieht leicht, daß diese Aufgabe zwey Proportionen enthält. 1) 8 Personen verzehren in Einem

Jahr 6 Tonnen Rocken, wie viel verzehren sie in 4 Jahren? 1 : 4 = 6 : $\frac{4.6}{1}$ = 24 Tonn. = x. 2) In 4 Jahren verzehren 8 Personen 24 Tonn. = x; wie viel verzehren 12 Personen in gleicher Zeit? 8 : 12 = 24 : $\frac{12.24}{8}$ = 36 Tonn.

Mit Hülfe der Kettenrechnung lassen sich solche Aufgaben auf folgende Art aufsetzen und berechnen (§. 91.)

1 Jahr : 4 Jahr = 6 Tonn. : x Tonn.
8 Personen : 12 Pers. = x Tonn. : y Tonn.

---

1. 8 : 4. 12 = 6 Tonn. : y Tonn. (§. 91)

---

$\frac{4.12.6}{1.8} = \frac{288}{8}$ = 36 Tonn. = y

**Zweytes Beyspiel.** 1000 ℳ gewinnen in 8 Monaten 209 ℳ, wie viel gewinnen 400 ℳ in 40 Monaten?

8 Monat : 40 Monat = 209 ℳ : x ℳ
1000 ℳ : 400 ℳ = x ℳ : y ℳ

---

8. 1000 : 40. 400 = 209 ℳ : y ℳ

---

8000 : 16000 = 209 ℳ : y ℳ

---

1 : 2 = 209 ℳ : y ℳ
y = 418 ℳ

**Drittes Beyspiel.** Wenn 4 Ducaten 11 ℳ und 6 ℳ 5 Rubel betragen, wie viel Rubel erhält man dann für 100 Ducaten?

4 Duc. : 11 ℳ = 100 Duc. : x ℳ
6 ℳ : 5 Rub. = x ℳ : y Rub.

24 : 55 = 100 : y

$\frac{5500}{24} = 229\frac{1}{8}$ Rub.

## Beyspiele der verkehrten Regel mit Fünfen.

**Erstes Beyspiel.** Eine Wiese ist von der Beschaffenheit, daß auf zwey Scheffeln Flächenmaaß 3 Pferde 4 Tage gefüttert werden können; man fragt, wie viele Tage 5 Scheffel desselben Landes für 6 Pferde Futter geben können? Die Aufgabe theilt sich in zwey Proportionen: 1) 2 Scheffel Land geben 3 Pferden 4 Tage hindurch Futter, wie viele Tage lassen sich 6 Pferde auf demselben Lande füttern? Man begreift leicht, daß dies nach der verkehrten Regula Detri berechnet werden muß, weil je mehr Pferde man auf die Wiese treibt, desto weniger Tage sie auf derselben grasen können. (§. 102). 2) 2 Scheffel Land geben für 6 Pferde x Tage hindurch Futter, wie lange werden sie auf 3 Scheffeln Nahrung finden? Die Beantwortung dieser Frage gehört zur directen Regula Detri.

6 Pferde : 3 Pferd. = 4 Tage : x Tage.
2 Scheff. : 5 Scheff. = x Tag. : y Tage.

12 : 15 = 4 : y

$y = \frac{15 \cdot 4}{12} = \frac{60}{12} = 5$ Tag.

Zweytes Beyspiel. In einer Stadt befindet sich ein solcher Vorrath, daß 12000 Mann davon zwey Wochen unterhalten werden können, wenn jeder täglich 30 Unzen Brodt erhält; aber die Besatzung ist jetzt nur 9000 Mann; man fragt wie viel Brodt jeder täglich erhalten kann, damit der Vorrath 5 Wochen vorhalte?

Diese Aufgabe zerfällt in zwey Proportionen: 1) 12000 Mann erhalten täglich jeder 30 Unzen Brodt in zwey Wochen, wie viel Brod können 9000 Mann jeder täglich und in gleicher Zeit erhalten? 2) Von 9000 Mann bekommt jeder täglich 30 Unzen Brodt in zwey Wochen, wie viel kann jeder täglich in 5 Wochen bekommen? Nach den §. 102 gegebenen Regeln gehören beyde Fragen zur verkehrten Regula Detri und der Aufsatz hat folgende Gestalt:

9000 Mann : 12000 Mann = 30 Unz. : x Unz.
5 Wochen : 2 Wochen = x Unz. : y Unz.

45000 : 24000 = 30 Unz. : y Unz.

45 : 24 = 30 : y

$$\frac{24 \cdot 30}{45} = \frac{720}{45} = 16 \text{ Unz.} = y.$$

Drittes Beyspiel. Mit 3 Pflügen pflügt man in zwey Tagen 5 Tonnen Land um; wie viel Pflüge muß man haben, um in 8 Tagen 200 Tonnen Land umzupflügen?

8 Tag. : 2 Tag. = 3 Pflüge : x Pflüge
5 Ton. : 200 Ton. = x Pfl. : y Pfl.

40 : 400 = 3 Pfl. : y Pfl.

$\frac{400 \cdot 3}{40} = \frac{1200}{40} = 30$ Pfl. = y.

§. 104.

Die Regel mit Sieben heißt die Rechnungsart, wenn man zu 7 Zahlen, die in Proportion sind, die achte finden soll. Z. B. 8 Kaufleute gewinnen auf 1000 ℳ in 2 Monaten 700 ℳ, wie viel gewinnen 10 Kaufleute auf 4000 ℳ in 4 Monaten? der Aufsatz ist folgender:

2 Monat. : 4 Monat. = 700 ℳ : x ℳ
1000 ℳ : 4000 ℳ = x ℳ : y ℳ
8 Kaufl. : 10 Kaufl. = y ℳ : z ℳ

16000 : 160000 = 700 ℳ : z ℳ

1 : 10 = 700 ℳ : z ℳ

z = 7000 ℳ

Durch die Regel mit Neunen findet man zu 9 Verhältnißzahlen die zehnte. Z. B. man will wissen, wie viele Ducaten 3456 Mariengroschen ausmachen. Wenn man nun wüßte, wie viele Mariengroschen auf den Ducaten gehen, so könnte die Aufgabe durch eine einzige Proportion aufgelöset werden. Weiß man aber dies nicht, aber doch so viel, daß 3

Mariengroschen = 2 Ggr.; 16 Ggr. = 1 Guld.; 3 Guld = 2 ℳ und 11 ℳ = 4 Ducaten, so entsteht folgender Aufsatz:

3 Mgr. : 2 Ggr. = 3456 Mgr. : x Ggr.
16 Ggr. : 1 Guld. = x Ggr. : y Guld.
3 Guld. : 2 ℳ = y Guld. : z ℳ
11 ℳ : 4 Duc. = z ℳ : u Ducaten

3 16 3 11 1 2.1.2.4 = 3456 Mgr. : u Ducaten

$\frac{2.2.4.3456}{3.16.3.11} = \frac{55296}{1584} = 34\frac{1440}{1584}$ Ducaten.

## §. 105.

Die Gesellschafts- (regula societatis) oder richtiger Theilungsrechnung wird da angewandt, wo Größen nach einem gewissen Verhältniß getheilt werden sollen. Es soll z. B. der in einer Handlung gewonnene Vortheil im Verhältniß der zur Handlung hergeschossenen Kapitalien eines jeden Interessenten getheilt werden; oder mehrere Personen schießen in gleichen oder ungleichen Zeiten Kapitalien zusammen, deren Zinsen im Verhältniß der Größe der Kapitalien und der Zeit, während welcher sie Zinsen eingebracht haben, vertheilt werden sollen; oder ein geerbtes Kapital soll nach einem bestimmten Verhältniß oder Regel eingetheilt werden.

Erstes Beyspiel. Drey Personen treiben gemeinschaftlich eine Handlung. A hat 10000 ℳ, B 7000 ℳ und C 9000 ℳ zugeschossen. Nach Verlauf

lauf einiger Zeit haben sie 15000 ℳ gewonnen; wie viel kommt davon einem jeden nach seinem eingeschossenen Kapital zu? Man nenne den Antheil von A = x, von B = y und von C = z.

| | | |
|---|---|---|
| A schoß her | = | 10000 ℳ |
| B | = | 7000 — |
| C | = | 9000 — |
| Summe | = | 26000 ℳ |

Nun verhält sich das ganze Kapital zum ganzen Gewinn wie eines jeden eingeschossenes Kapital zu eines jeden Antheil am gesammten Gewinn. Hieraus entstehen folgende Proportionen:

26000 : 10000 = 15000 : x; x = $5769\frac{3}{13}$ ℳ
26000 : 7000 = 15000 : y; y = $4038\frac{6}{13}$ —
26000 : 9000 = 15000 : z; z = $5192\frac{4}{13}$ —

ganzer Gewinn = 15000 ℳ

**Zweytes Beyspiel.** A hat ein Kapital hergeschossen von 600 ℳ in 5 Monaten, B 400 ℳ in 5 Monaten und C 126 ℳ in 1 Monat, womit 932 ℳ gewonnen worden sind. Wie muß dieser Gewinn im Verhältniß des Kapitals und der Zeit vertheilt werden? Zur Abkürzung der Rechnung kann man eines jeden Einschuß auf die kleinste Zeit bringen; nämlich A hat entweder 600 ℳ in 5 Monaten hergegeben oder 600. 5 = 3000 ℳ in Einem Monat, mit welcher Summe eben so viel gewonnen wird, wenn man an-

nimmt, daß der Gewinn im Verhältniß der Zeit und des Kapitals ist.

Also in Einem Monat A = 600. 5 = 3000 ℳ
B = 400. 3 = 1200 —
C = 126. 1 = 126 —

Die auf Einen Monat reducirte zusammengelegte Summe = 4326 ℳ

Die Vertheilung des Gewinnes geschieht durch folgende 3 Proportionen:

4326 : 3000 = 932 : x; x = 646 $\frac{702}{2163}$
4326 : 1200 = 932 : y; y = 258 $\frac{1146}{2163}$
4326 : 126 = 932 : z; z = 27 $\frac{315}{2163}$

ganzer Gewinn = 932 ℳ

**Drittes Beyspiel.** Zwey Mauermeister haben an der Aufführung einer Mauer gearbeitet. A hat ein Stück aufgesetzt von 30 Fuß Länge, 20 Fuß Höhe und 3 Fuß Dicke; B ein Stück von 40 Fuß Länge, 10 Fuß Höhe und 2 Fuß Dicke und haben dafür zusammen erhalten 400 ℳ. Wie viel muß jeder davon haben? Die Bezahlung richtet sich nach der Menge der Arbeit, welche daher auf Kubicfuß gebracht werden muß. A hat also aufgeführt 30. 20. 3 = 1800 Kubicfuß und B 40. 10. 2 = 800 Kubicfuß, beyde also zusammen 2600 Kubicfuß. Dies gibt folgende Proportionen:

2600 : 1800 = 400 : x; x = 276 $\frac{10}{13}$ ℳ
2600 : 800 = 400 : y; y = 123 $\frac{1}{13}$ —

400 ℳ

§. 106.

Durch die Alligations- oder Mischungsrechnung berechnet man, in welcher Quantität gewisse Ingredienzen oder Theile in einer gegebenen Mischung vorhanden sind, wenn das Verhältniß der Ingredienzen unter sich bekannt ist. Das Verhältniß von Schwefel, Salpeter und Kohlen in einem guten Schießpulver ist folgendes: man nimmt 1 ℔ oder 32 Loth Salpeter, 6 Loth Kohlen und 4 Loth Schwefel, wo dann die gemischte Masse = 32 + 6 + 4 = 42 Loth wiegt. Man will nun 1000 ℔ Schießpulver verfertigen, wie viel muß man dazu von erwähnten Ingredienzen nehmen?

Die Frage läßt sich durch folgende drey Proportionen auflösen.

42 : 32 = 1000 : x Salpeter; x = 761 $\frac{12}{21}$ ℔
42 : 6 = 1000 : y Kohlen; y = 142 $\frac{18}{21}$ ℔
42 : 4 = 1000 : z Schwefel; z = 95 $\frac{5}{21}$ ℔

Die ganze Mischung = 1000 ℔

§. 107.

Zinsen wachsen im Verhältniß der Zeit und des Kapitals und folglich gehört die Zinsrechnung zur directen Regula Detri. Z. B. 100 ℳ geben 4 p. C. was

was geben 1200 ℳ? $x = \frac{4 \cdot 1200}{100} = \frac{4800}{100} =$ 48 ℳ.

Folgende Aufgaben gehören zur Zinsrechnung:

1) Ein gewisses Kapital b ist auf Zinsen zu 4 p. C. ausgethan, man schlägt jährlich die Zinsen zum Kapital, doch ohne davon neue Zinsen zu nehmen; man fragt, wie groß dies Kapital nach einer gewissen Anzahl von Jahren ist. Z. B. 8 = n.

Wenn 100 ℳ jährlich 4 ℳ einbringen, so ist ihr Werth nach acht Jahren = 100 + 4. 8 = 132 oder im allgemeinen = 100 + 4. n. Folglich ist der Werth eines Kapitals b nach Verlauf von n Jahren nach der Regula Detri 100: 100 + 4 n = b: x; $x = \frac{(100 + 4\ n)\ b.}{100}$ Hieraus folgt diese Regel: man multiplicire den Werth von 100 ℳ nach Verlauf der gegebenen Anzahl von 12 Jahren mit dem gegebenen Kapital und dividire dies Product durch 100, so hat man den Werth des Kapitals b nach Verlauf von n Jahren. Z. B. was sind 4000 ℳ nach 12 Jahren werth? Der Werth von 100 ℳ nach 12 Jahren ist = 100 + 4. 12 = 148, dies multiplicire man mit 4000 und dividire durch 100; so ist der Werth von 4000 ℳ nach 12 Jahren = $\frac{148 \cdot 4000}{100} = \frac{592000}{100} = 5920$ ℳ.

Anmerk.

Anmerk. Der Werth von 100 nach n Jahren ist zu 4 p. C. bestimmt; man begreift aber leicht, daß derselbe nach einem jeden andern Zinsfuß bestimmt werden kann. Z. B. zu 3 p C. = 100 + 3. n; zu $3\frac{1}{4}$ p.C. = 100 + $3\frac{1}{4}$. n; zu 2ᵉ p. C. = 100 + 2. n u. s. w.

2) Es wird gefragt, wie viel ein Kapital nach einer gewissen Reihe von Jahren werth ist, wenn nicht allein die Zinsen zum Kapital geschlagen, sondern auch Zinsen auf Zinsen gerechnet werden, oder man fragt nach dem Werth eines Kapitals mit Zinsen und Zinsen auf Zinsen.

Wenn der Zinsfuß 4 p. C. ist, so ist der Werth des Kapitals b beym Schluß des ersten Jahrs = $\frac{104}{100}$. b, welches wir c nennen wollen; beym Schluß des zweyten Jahrs ist der Werth von c = $\frac{104}{100}$. c = d; am Ende des dritten Jahrs ist der Werth von d = $\frac{104}{100}$ d. = e; am Ende des vierten Jahrs ist der Werth von e = $\frac{104}{100}$. e = f; u. s. w. Da nun c = $\frac{104}{100}$. b und d = $\frac{100}{104}$. c, so setze man diesen Werth von c in den Werth von d, wodurch man d = $\frac{104}{100}$. $\frac{104}{100}$. b findet; aber e = $\frac{104}{100}$. d und wenn man in diesen Ausdruck den Werth von d setzt, so hat man e = $\frac{104}{100}$. $\frac{104}{100}$. $\frac{104}{100}$. b u. s. w. Hieraus folgt,

daß

daß der Werth des Kapitals b mit Zinsen und Zinsen auf Zinsen

am Ende des ersten Jahres ist $= \frac{104}{100} \cdot b$

des zweyten Jahrs $= \frac{104}{100} \cdot \frac{104}{100} \cdot b$

des dritten Jahrs $= \frac{104}{100} \cdot \frac{104}{100} \cdot \frac{104}{100} \cdot b$

des vierten Jahrs $= \frac{104}{100} \cdot \frac{104}{100} \cdot \frac{104}{100} \cdot \frac{104}{100} \cdot b$

Hieraus ergibt sich folgende allgemeine Regel: man multiplicire den Werth von 100 ℔, nach Verlauf Eines Jahrs so oft mit sich selbst als Jahre verlaufen sind und multiplicire dies Product aufs neue mit dem gegebenen Hauptkapital: so hat man den Werth des Kapitals mit Zinsen und Zinsen auf Zinsen. Wie groß ist z. B. der Werth von 20000 ℔ mit Zinsen und Zinsen auf Zinsen nach Verlauf von 4 Jahren? Zuerst multiplicire man $\frac{104}{100}$ viermal mit sich selbst und dann das Product 1,16985856 mit 20000, so erhält man den Werth dieses Kapitals = 23397,1712 ℔.

**Anmerk.** 1. Durch Hülfe der Logarithmen können diese Rechnungen weit leichter geführt werden; doch muß man dazu Logarithmen mit so vielen Decimalen als möglich gebrauchen, welches nachher theils in der Arithmetik theils in der Algebra erklärt werden soll.

**Anmerk.** 2. Ich habe hier in der practischen Anwendung der Lehre von den Proportionen nur kurz seyn können. Ausführlichere Auflösungen

gen und mehr Beyspiele wird man finden in Cramers Regnebog und praktisk Regnekonst ved N. Söndergaard, Kiöbenhavn 1790; in Clausbergs demonstrativen Rechenkunst, Leipzig 1732; Anwendung der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie von Parrot, Erlangen 1782; Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie nebst ihrer Anwendung auf practische Rechnungen von G. S. Klügel, Berlin 1782; J. H. Crohns Rechenbuch, verbessert von J. M. P. Buchenröder, Hamburg 1784; Rechenbuch von A. Reichel Leipzig 1785; Unterricht in der practischen Rechenkunst und geometrischen und optischen Berechnungen von J. C. M. (Mayer) Nürnberg 1786; Traité d'arithmetique ou les principes et la practique du calcul par P. Sennebier Lausanne 1774.

**Anmerk.** 3. Solche Aufgaben, bey welchen mehrere Proportionen zum Grunde liegen, und welche durch die zusammengesetzte Regula Detri aufgelöset werden, hat ein holländischer Rechenmeister Rees auf eine Art aufgelöset, welche nach ihm die Reesische Regel genannt wird. Man findet sie recht gut erklärt in J. C. M. (Mayers) Unterricht in der practischen Rechenkunst pag. 50—55; Sönder-

Söndergaards praktiſke Regnekonſt pag. 135—140; M. L. Willigs gründliche Vorſtellung der Reeſiſchen Regel, Bremen und Göttingen 1759.

**Anmerk.** 4. Bey vielen Gelegenheiten iſt es wichtig, das Verhältniß des Fußmaaßes, des Gewichts, der Münzen u. ſ. w. verſchiedener Staaten zu kennen. Darüber findet man Belehrung in Eiſenſchmidi de ponderibus et menſuris veterum Romanorum, Graecorum et Hebraeorum. Argentorati 1708; Metrologie par Paucton Paris 1770; J. E. Kruſens allgemeiner und beſonders hamburgiſcher Contoriſt, 3 Theile, Hamburg 1782. Der allgemeine kleine Contoriſt, Erfurt 1791.

**Anmerk.** 5. Die Anwendung der Mathematik im allgemeinen und der Arithmetik insbeſondere auf verſchiedene Vorfälle im bürgerlichen Leben und auf andere Wiſſenſchaften haben verſchiedene Verfaſſer abgehandelt: J. F. Polacks matheſis forenſis, Leipzig 1770; Reinholds Arithmetica forenſis, Münſter 1785; die Anwendung der Arithmetik auf mathematiſche und beſonders militäriſche Wiſſenſchaften. Hannover 1771. Political Arithmetic by A. Young. London 1774. The Doctrine of Annuities and Reverſions by

by Th. Simpſin London 1742. The Doctrine of Annuities and Aſſurances by W. Morgan. London 1779. Entwurf einer allgemeinen Leihbank und anderer Anſtalten als Leibrenten, Sterbe- und Wittwen-Kaſſen von N. Fuß. Petersburg 1776. Anleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartſchaften mit Tabellen zum practiſchen Gebrauch von J. N. Tetens, Leipzig 1785. 2 Theile. Doch muß ich anmerken, daß die meiſten dieſer Schriften mehr Kenntniſſe als die gemeine Arithmetik vorausſetzen.

## Neuntes Kapitel.

## Von den Logarithmen.

### §. 108.

Eine **Progreßion** oder **Reihe** iſt eine Menge Zahlen, welche nach einer gewiſſen Ordnung oder einem beſtimmten Geſetz auf einander folgen. Eine **arithmetiſche Progreßion** oder **Reihe** iſt eine ſolche, in der die Zahlen dadurch wachſen oder abnehmen, daß man immer eine und dieſelbe Zahl zu der vorhergehenden addirt

addirt oder von derselben subtrahirt. So ist z. B. 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15, 17 u. s. w. eine wachsende oder steigende; aber 12. 10. 8. 6. 4. 2. 1 eine abnehmende oder fallende Reihe. In einer arithmetischen Reihe sind alle Glieder in einer stetigen arithmetischen Proportion (§. 69); den $1-3=3-5=5-7=7-9=9-11$ u. s. w. Wenn man also das erste Glied $=2$ und den Unterschied der Glieder $=3$ weiß, so kann man leicht die ganze arithmetische Progreßion aufsetzen, weil das zweyte Glied $=2+3$, das dritte $=5+3$, das vierte $=8+3$, das fünfte $=11+3$ u. s. w. ist. Die Reihe wird folgende seyn:

2. 5. 8. 11. 14. 17. 20. 23. 26. 29. 32 u. s. w.

## §. 109.

Eine **geometrische Progreßion** oder Reihe ist eine solche, in der die Zahlen dadurch wachsen oder abnehmen, daß die vorhergehende Zahl immer mit einer und derselben Zahl multiplicirt oder durch dieselbe dividirt wird. So ist 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64 u. s. w. eine wachsende oder steigende; aber 81. 27. 9. 3. 1 eine abnehmende oder fallende geometrische Reihe. Weiß man also das erste Glied einer wachsenden geometrischen Reihe $=1$ und den Namen des Verhältnisses oder den Exponenten $=4$ (§. 73), so kann man die ganze Progreßion aufsetzen, weil das zweyte

Glied

Glied = 1. 4, das dritte = 4. 4, das vierte = 16. 4, das fünfte = 64. 4 u. s. w. ist, woraus folgende geometrische Reihe zum Vorschein kommt:

1. 4. 16. 64. 256. 1024. 4096 u. s. w.

Eben so kann man aus dem ersten Gliede = 68 und dem Exponenten = 2 folgende fallende Reihe aufsetzen.

68. $\frac{68}{2}$. $\frac{68}{4}$. $\frac{68}{8}$. $\frac{68}{16}$. $\frac{68}{32}$. $\frac{68}{64}$. $\frac{68}{128}$ u. s. w.

d. h. 68. 34. 17. $8\frac{1}{2}$. $4\frac{1}{4}$. $2\frac{1}{8}$. $1\frac{1}{16}$. $\frac{17}{32}$ u. s. w.

Ferner ist klar, daß alle Glieder einer geometrischen Reihe in einer stetigen geometrischen Proportion sind (§. 73). So ist in der wachsenden Reihe 1 : 4 = 4 : 16 = 16 : 64 = 64 : 256 = 256 : 1024 = 1024 : 4096 u. s. w. und in der abnehmenden 68 : 34 = 34 : 17 = 17 : $8\frac{1}{2}$ = $8\frac{1}{2}$ : $4\frac{1}{4}$ = $4\frac{1}{4}$ : $2\frac{1}{8}$ u. s. w.

## §. 110.

Wenn man eine geometrische Reihe von Zahlen hat, z. B. 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128 u. s. w. und man betrachtet das Verhältniß der beyden ersten 1 : 2 als das einfache oder zusammensetzende Verhältniß, so ist das Verhältniß 1 : 2 Einmal; das Verhältniß 1 : 4 zweymal; das Verhältniß 1 : 8 dreymal; das Verhältniß 1 : 16 viermal aus dem einfachen Verhältnisse 1 : 2 zusammengesetzt (§. 93).

Wenn man nun diese Reihe hinsetzt und die Anzahl der Verhältnisse unten anmerkt, wie

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128 u. s. w.
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. u. s. w.

so sind die unten stehenden Zahlen, welche die Anzahl der Zusammensetzungen angeben, die **Logarithmen** der oben stehenden zusammengesetzten Verhältnisse. So ist z. B. der Logarithme von (128 : 1) = 7 und bedeutet, daß das Verhältniß 128 : 1 siebenmal zusammengesetzt ist aus dem Grundverhältnisse 2 : 1; log. (64 : 1) = 6; log. (32 : 1) = 5; log. (16 : 1) = 4; log. (8 : 1) = 3; log. (4 : 1) = 2; log. (2 : 1) = 1, weil dies Verhältniß nur Einmal zusammengesetzt ist und log. 1 = 0, weil es 0 mal aus 2 : 1 zusammengesetzt ist. Die obere Reihe ist eine geometrische Reihe, welche mit 1 anfängt; die untere Reihe aber ist eine arithmetische, deren erstes Glied = 0 ist und wo der Unterschied der Glieder = 1 angenommen ist. **Die Zahlen der arithmetischen Reihe kann man also die Logarithmen der Zahlen in der geometrischen Reihe nennen.** Denn 7 ist eigentlich der Logarithme des Verhältnisses $128 : 1 = \frac{128}{1}$ (§. 73), weil aber $\frac{128}{1} = 128$, so kann man auch sagen, 7 sey der Logarithme von 128; eben so ist 6 der Logarithme von 64 und 5 = log. 32.

## §. 111.

So viele geometrische Reihen man sich mit der arithmetischen Reihe in Verbindung denken will, so viele

viele verschiedene Logarithmen-Systeme erhält man auch. Z. B.

Geomet. Reihe: 1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187 u. s. w.
Arithm. Reihe: 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. u. s. w.

In diesem Logarithmen-System ist log. 1 = 0; log. 3 = 1; log. 9 = 2, log. 27 = 3 u. s. w. Nimmt man die decadische Progreßion, oder eine geometrische Progreßion, in der man immer mit 10 multiplicirt, so erhält man:

Geom. Reihe: 1. 10. 100. 1000. 10000. 100000. 1000000
Arithm. Reihe
oder Logarithm. 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6.

Hier ist log. 1 = 0; log. 10 = 1; log. 100 = 2; log. 1000 = 3 u. s. w.

Das erste einfache Verhältniß der geometrischen Reihe nennt man das **Grundverhältniß** des Logarithmen-Systems, z. B. in der ersten Progreßion 1 : 3 und in der letzten 1 : 10. Die **Grundzahl** (basis) ist diejenige Zahl des Logarithmen-Systems, deren Logarithme = 1 ist, z. B. in der ersten Progreßion 3 und in der letzten 10. Das **Briggische** oder **gemeine Logarithmen-System**, welches man in unsern gewöhnlichen Logarithmen-Tafeln findet, heißt dasjenige, dessen Grundverhältniß 1 : 10 und dessen Grundzahl 10 ist. Die Logarithmen desselben werden die **Briggischen** oder **gemeinen Logarithmen** (Logarithmi vulgares) genannt, und von diesen wird

im folgenden allein gehandelt werden. Man mag nun ein Logarithmen-System annehmen, welches man will, so gibt es dennoch viele Zwischenzahlen in der geometrischen Reihe, zu welchen man keine Logarithmen in ganzen Zahlen in der arithmetischen Reihe findet. So sind im Briggischen System die Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 10 kleiner als 1 und größer als 0 oder gleich 0 und einem Decimalbruch; die Logarithmen der Zahlen zwischen 100 und 1000 sind kleiner als 3 und größer als 2 d. h. gleich 2 und einem Decimalbruch. Man hängt daher jedem Logarithmen mehrere Nullen oder Decimalen an (§. 48), z. B. 6, wodurch die Haupt-Logarithmen folgende Gestalt erhalten:

| Zahlen: | 1. | 10. | 100. | 1000. | 10000. |
|---|---|---|---|---|---|
| Logar.: | 0,000000 | 1,000000 | 2,000000 | 3,000000 | 4,000000 |

Die ganze Zahl in einem gegebenen Logarithmen vor dem Komma heißt die **Kennzifer** oder **Characteristik**. Z. B. im Logarithmen 3,245712 ist 3 die Kennzifer, das, was hinter dem Komma steht, nennt man die Decimalen oder **Mantissa**.

§. 112.

**Den Logarithmen einer gegebenen Zahl, die nicht 1 10, 100, 1000 u. s. w. ist, bis auf 7 Decimalstellen zu berechnen.** Die Zahl sey = 9.

Die gegebene Zahl wird entweder zwischen 1 und 10 oder 10 und 100 oder 100 und 1000 u. s. w. fallen.

fallen. Im gegenwärtigen Fall fällt sie zwischen 1 und 10. Man nenne die kleinere $a = 1{,}0000000$ und die größere $b = 10{,}0000000$. Man suche die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen 1 und 10 (§. 96) $= \sqrt{ab} = \sqrt{1.10} = 3{,}1622777 = c$. Man suche nun die mittlere arithmetische Proportionalzahl (§. 72) zwischen log. 1 = 0 und log. 10 = 1 (§. 111), welches $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5000000$ ist; also log. 3.1622777 = log. c = 0,5000000. Auf dieselbe Art sucht man die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen 10,0000000 und 3,1622777 oder zwischen b und c. Diese ist $= d = \sqrt{bc} = 5{,}6234132$. Ferner zwischen log. b = 1,0000000 und log. c = 0,5000000 die mittlere arithmetische Proportionalzahl = 0,7500000; also log. d = log. 5,6234132 = 0,7500000. Ferner suche man die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen 10 = b und d = 5,6234132; also $\sqrt{bd} = e = 7{,}4989421$ und die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen log. b = 1,0000000 und log. d = 0,7500000, welches = 0,8750000 = log. e = log. 7,4989421. Auf die Art fahre man fort die geometrischen Proportionalzahlen $f = \sqrt{be}$; $g = \sqrt{bf}$; $h = \sqrt{fg}$ u. s. w. und eben so die dazu gehörigen mittlern arithmetischen Proportionalzahlen oder die Logarithmen der Zahlen zwischen b und e, b und f,

f und g u. s. w. zu berechnen, bis man zuletzt zu einer mittlern geometrischen Proportionalzahl $\sqrt{\gamma\delta} = \varepsilon =$ 9,0000000 kommt, welche höchstens nicht mehr als $\frac{1}{10000000}$ von 9 abweicht; die correspondirende mittlere arithmetische Proportionalzahl = 0,95424251 ist der Logarithme von 9.

| a = 1,0000000<br>b = 10,0000000 | Mittlere geometrische Proportionalzahl. | Mittlere arithmetische Proportionalzahl oder Logarithme. |
|---|---|---|
| $\sqrt{ab} = c$ | 3,1622777 | 0,50000000 |
| $\sqrt{bc} = d$ | 5,6234132 | 0,75000000 |
| $\sqrt{bd} = e$ | 7,4989421 | 0,87500000 |
| $\sqrt{be} = f$ | 8,6596432 | 0,93750000 |
| $\sqrt{bf} = g$ | 9,3057204 | 0,96875000 |
| $\sqrt{fg} = h$ | 8,9768713 | 0,95312500 |
| $\sqrt{gh} = i$ | 9,1398170 | 0,96093750 |
| $\sqrt{hi} = k$ | 9,0579777 | 0,95703125 |
| $\sqrt{hk} = l$ | 9,0173333 | 0,95507812 |
| $\sqrt{hl} = m$ | 8,9970796 | 0,95410156 |
| $\sqrt{lm} = n$ | 9,0072008 | 0,95458983 |
| $\sqrt{mn} = o$ | 9,0021388 | 0,95434570 |
| $\sqrt{mo} = p$ | 8,9996088 | 0,95422363 |
| $\sqrt{op} = q$ | 9,0008737 | 0,95428467 |
| $\sqrt{pq} = r$ | 9,0002412 | 0,95425415 |
| $\sqrt{pr} = s$ | 8,9999250 | 0,95421889 |
| $\sqrt{rs} = t$ | 9,0000831 | 0,95424652 |
| $\sqrt{st} = v$ | 9,0000041 | 0,95424271 |
| $\sqrt{sv} = x$ | 8,9999650 | 0,95424080 |
| $\sqrt{vx} = y$ | 8,9999845 | 0,95424217 |
| $\sqrt{vy} = z$ | 8,9999943 | 0,95424223 |
| $\sqrt{vz} = \alpha$ | 8,9999992 | 0,95424247 |
| $\sqrt{v\alpha} = \beta$ | 9,0000016 | 0,95424259 |
| $\sqrt{\alpha\beta} = \gamma$ | 9,0000004 | 0,95424253 |
| $\sqrt{\alpha\gamma} = \delta$ | 8,9999998 | 0,95424250 |
| $\sqrt{\gamma\delta} = \varepsilon$ | 9,0000000 | 0,95424251 |

An-

Anmerk. 1. Die Logarithmen bringen viele und beträchtliche Abkürzungen in mathematische Berechnungen, wie ich nachher zeigen werde. Der Schottische Baron Neper zu Merchiston hat sie zuerst erfunden (Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio autore Joh. Nepero, Edinb. 1614). Die Neperschen Logarithmen sind von den gemeinen ganz verschieden; ihre Grundzahl ist = 2999999 (Karstens Lehrbegriff der Mathematik, 2 Theil. pag. 193 und Kästners astronomische Abhandlungen 2 Samml. pag. 68). Diese Logarithmen werden jetzt nicht gebraucht, da Brigg auf Nepers eigenen Rath die jetzt gebräuchlichen und gewöhnlichen oder Briggischen Logarithmen, deren Grundzahl = 10 ist, berechnet hat, weil diese zum Gebrauch bequemer sind als die Neperschen. Hinrich Brigg Professor in Oxford hat diese Logarithmen von 1 bis 20000 und von 90000 bis 100000 auf 14 Decimalstellen berechnet (Henr. Brigg Arithmetica Logarithmica Oxford. 1624) Die dazwischen fehlenden Logarithmen sind von dem holländischen Mathematiker Adrian Vlacq berechnet worden. (Arithmetica Logarithmica seu Logarithmorum chi-

liades centum una cum canone triangu-lorum sive tabula sinuum etc. Goudae 1627). In diesem Werke findet man die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 100000 auf 10 Decimalstellen und die Logarithmen der Sinus, Tangenten und Secanten auf eben so viel Decimalstellen. Außer diesen großen Ausgaben logarithmischer Tafeln hat man noch viele kleinere Ausgaben für die Zahlen von 1 bis 10000 oder 1 bis 20000 auf 7 Decimalen, welche bey den meisten Rechnungen hinreichen. Von diesen will ich nur anführen: Tables des Logarithmes pour les sinus et Tangentes et pour tous les nombres depuis 1 jusqu'a 1080. Paris 1760, welche bequeme Ausgabe der berühmte französische Astronom de la Caille besorgt hat. Zum Schluß will ich noch die besten und neuesten Ausgaben logarithmischer Tafeln anführen, in welchen man nicht allein die Logarithmen der Zahlen, sondern auch der trigonometrischen Linien, Sinus, Tangenten u. s. w. antrifft. W. Gardiner's Tables of Logarithmes for all numbers from 1 to 102100 London 1762. Pezenas hat davon eine französische Ausgabe besorgt: Tables de Logarithmes contenant

les

les logarithmes des nombres depuis 1 jusqu'a 102100 et les Logarithmes des Sinus, Tangentes de 10 en 10 secondes, nouvelle edition augmentée des Logarithmes des Sinus et Tangentes pour chaque seconde des quatre premiers degrés. Avignon 1770. J. C. Schulze Sammlung logarithmiſcher Tafeln, Berlin 1778, 2 Bände. G. Vega's logarithmiſche Tafeln, Wien 1783. Tables portatives de Logarithmes publiées à Londres par M. Gardiner, augmentées et perfectionées dans leur diſpoſition par M. Callet. Paris 1783. In allen dieſen Tafeln hat man die Kennziſer der Logarithmen weggelaſſen, weil man weiß, daß dieſelbe für alle Zahlen zwiſchen 1 und 10 = 0, zwiſchen 10 und 100 = 1, zwiſchen 100 und 1000 = 2 u. ſ. w. iſt. Im allgemeinen iſt die Kennziſer der Anzahl der Ziſern oder Zahlzeichen um 1 vermindert gleich. Z. B. 385792 beſteht aus 6 Ziſern und die Characteriſtik des Logarithmen dieſer Zahl iſt = 5 und umgekehrt kann man aus der Kennziſer eines gegebenen Logarithmen ſchlieſſen, daß die Zahl aus Einer Ziſer mehr beſtehe als die Kennziſer. Iſt z. B. der

Logarithme = 4,7810364, so muß die Zahl 6 Ziffern haben und der Logarithme gehört zu 60400. Die übrige Einrichtung der Tafeln, wie man den Logarithmen einer gegebenen Zahl aufschlage und wie man die Zahl finde, die zu einem gegebenen Logarithmen gehört, findet man in der Einleitung zu den Tafeln erklärt.

Anmerk. 2. Die ersten Berechner der Logarithmen Neper, Brigg und Vlacq gingen diesen mühsamen Weg und um einen einzigen Logarithmen in 7 Decimalstellen zu bestimmen, mußten sie 26 mittlere geometrische und eben so viele mittlere arithmetische Proportionalzahlen suchen und also 26 mal die Quadratwurzel in 7 Decimalstellen ausziehen (§. 112). Weil man diese Proportionalzahlen in den meisten Fällen nur durch Näherung finden kann (§. 63. 65.), so bleibt in der letzten Decimale eine Ungewißheit, daher die Logarithmen beym Gebrauch desto genauer sind, je mehr Decimalstellen sie haben. Eigentlich hat man nur nöthig die Logarithmen der Primzahlen zu berechnen, weil die Logarithmen der aus ihnen zusammengesetzten Zahlen sich durch die Addition der Logarithmen der Primzahlen finden lassen (§. 113. 114). Bey einigen Berechnungen ist es nöthig,

Loga-

Logarithmen mit so vielen Decimalen als möglich zu haben. Im Callet findet man die Logarithmen in 20 Decimalen für die Zahlen von 1 bis 1161 und von 101000 bis 101179, ferner bey Pezenas und mehrern. In der höhern Mathematik kommt eine Art von Logarithmen vor, welche man die natürlichen oder hyperbolischen nennt, deren Grundzahl = 2,7182818284 59 ist. Diese natürlichen Logarithmen, welche häufig in der Integral-Rechnung vorkommen, kann man leicht durch unendliche Reihen berechnen und sie in Briggische verwandeln. (Euleri introductio in analysin Lib. I. Cap. 7. §. 119-215. Leçons de Mathematiques par M. l'Abbé Marie pag. 200-203. Paris 1784. Vega's Vorlesungen über die Mathematik. Band I. Wien 1793. pag. 411-425.) Die hyperbolischen Logarithmen findet man gleichfalls in den oben angeführten Tafeln von Schulze, Vega und Callet.

## §. 113.

**Den Logarithmen eines Products findet man, wenn man die Logarithmen der Factoren addirt.** log. a b = log. a + log. b.

Wenn man a mit b multiplicirt, so ist 1 : a = b : ab (§. 75). Gebraucht man nun statt der Zahlen ihre

Loga-

Logarithmen, so verwandelt sich die geometrische Proportion in folgende arithmetische: Log. 1 — Log. a = Log. b — Log. ab (§. 110), in der die Summe der äußern Glieder der Summe der mittlern gleich ist (§. 71) d. h. Log. 1 + Log. ab = Log. a + Log. b; aber Log. 1 = 0 (§. 110. 111), also Log. ab = Log. a + Log. b.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Log. 12 | = 1,079181 | Log. 9876 | = 3,9945810813 |
| Log. 8 | = 0,903090 | Log. 517 | = 2,7134905431 |
| Log. (12.8) | = 1,982271, welcher zu 96 gehört. | L.(9876.517) | = 6,7080716244, welcher zu 5105892 gehört. |

§. 114.

**Den Logarithmen eines Quotienten erhält man, wenn man vom Logarithmen des Dividendus den Logarithmen des Divisors subtrahirt.** Log. $\frac{a}{b}$ = Log. a — Log. b.

Wenn man a durch b dividirt, so ist b : a = 1 : $\frac{a}{b}$ (§. 75. Num. 4) oder in Logarithmen ausgedruckt, Log. b — Log. a = Log. 1 — Log. $\left(\frac{a}{b}\right)$, also Log. b + Log. $\left(\frac{a}{b}\right)$ = Log. a + Log. 1. (§. 71.) Aber Log. 1 = 0 (§. 110) und folglich Log. b + Log. $\left(\frac{a}{b}\right)$ = Log. a und, wenn man auf beyden Seiten Log. b abzieht, Log. $\left(\frac{a}{b}\right)$ = Log. a — Log. b. (§. 6. Grundf. 4).

Log.

| | |
|---|---|
| log. 920 = 2,963788 | log. 8622 = 3,935608 |
| log. 40 = 1,602060 | log. 9 = 0,954243 |
| log. $\frac{920}{40}$ = 1,361728, | log. $\frac{8622}{9}$ = 2,981365, |
| wozu 23 gehört. | wozu 958 gehört. |

## §. 115.

Das Quadrat einer gegebenen Zahl a ist = aa = $a^2$ und der Kubus von a = aaa = $a^3$ (§. 56. 57); also log. $a^2$ = log. a + log. a und log. $a^3$ = log. a + log. a + log. a = 3. log. a (§. 113). Man findet daher den Logarithmen einer Quadratzahl, wenn man den Logarithmen der Wurzel mit 2 multiplicirt und den Logarithmen einer Kubiczahl, wenn man den Logarithmen der Wurzel mit 3 multiplicirt. Hieraus folgt zugleich, daß man den Logarithmen einer Quadratwurzel findet, wenn man den Logarithmen der Quadratzahl durch 2 dividirt und den Logarithmen einer Kubicwurzel, wenn man den Logarithmen der Kubiczahl durch 3 dividirt.

Man soll $\sqrt{}$ 99225 finden.

log. 99225 = 4,9966211

log. $\frac{99225}{2}$ = 2,4983105,

wozu 315 gehört.

Man

Man ſoll den Kubus von 46 finden.

log. 46 = 1,6627578317

3

3. log. 46 = 4,9882734951,

wozu 97336 gehört.

**Anmerk.** Wenn man ſich der Logarithmen zur Multiplication, Quadrirung und Kubirung der Zahlen bedienen will, ſo iſt es am ſicherſten, Logarithmen mit vielen Decimalen zu nehmen, damit der kleine Fehler, der in der letzten Decimalſtelle ſteckt, nicht durch Vervielfachung deſſelben beträchtlich werde.

§. 116.

**Zu drey gegebenen Zahlen a, b, c die vierte Proportionalzahl d durch Logarithmen zu finden.**

1) Man ſuche in den Tafeln die Logarithmen der beyden mittlern Glieder oder des zweyten und dritten b und c und addire ſie = log. b + log. c.

2) Von dieſer Summe ſubtrahire man den Logarithmen des erſten Gliedes, ſo gibt der Unterſchied den Logarithmen der vierten Proportionalzahl d oder log. d = log. b + log. c — log. a.

**Beweis.** Weil d die vierte Proportionalzahl zu a, b und c ſeyn ſoll, ſo iſt a : b = c : d (§. 98) und,

wenn

wenn man ſtatt der Zahlen mit ihren Logarithmen rechnet, log. a — log. b = log. c — log. d (§. 110); folglich log. a + log. d = log. b + log. c (§. 74). Wenn man nun auf beyden Seiten den Logarithmen von a ſubtrahirt, ſo iſt log. d = log. b + log. c — log. a = log. $\left(\frac{b.c}{a}\right)$.

Man ſuche z. B. die vierte Proportionalzahl zu 17, 597 und 83, ſo iſt 17 : 597 = 83 : d.

log. 597 = 2,775974
log. 83 = 1,919078

log. (597. 83) = 4,695052
log. 17 = 1,230449

$$\log. d = \log.\left(\frac{597.83}{17}\right) = 3,464603$$

wozu am nächſten 2914 = d paßt. Wie der Bruch, der noch zu 2914 hinzukommen muß, gefunden werde, ſoll nachher erklärt werden.

## Andere Auflöſung.

Wenn ein gegebener Logarithme von 1 unter der Bedingung ſubtrahirt wird, daß die Kennziffer von log. 1 = 10 und alſo log. 1 = 10,0000000 ſtatt 0,0000000 iſt, ſo nennt man den Unterſchied das **arithmetiſche Complement** des gegebenen Logarithmen. So iſt log. 12 = 1,079181 und das arithmetiſche Complement deſſelben oder Compl. Logarith.

12 = 8,920819, welches man leicht durch die Subtraction findet. Log. 17 = 1,230449 und Compl. Log. 17 = 8,769551. Durch dieſen Complement-Logarithmen löſet man Aufgaben aus der Regula Detri folgender Maaßen auf: 1) Man ſucht das arithmetiſche Complement des Logarithmen der erſten Zahl a und addirt dazu die Logarithmen der zweyten und dritten b und c. Von der Kennziſer der Summe dieſer Logarithmen ſubtrahire man 10 (weil in dem arithmetiſchen Complement die Kennziſer 10 zu groß angenommen iſt). Der übrig bleibende Logarithme gehört zur vierten Proportionalzahl d oder log. d = Compl. log. a + log. b + log. c.

**Beweis.** $d = \frac{b.\ c}{a}$ (§ 98); aber b c durch a dividirt iſt eben ſo viel als b c mit $\frac{1}{a}$ multiplicirt (§. 43). log. $\frac{1}{a}$ = log. 1 — log. a (§. 114); alſo log. $\frac{1}{a}$ = Compl. log. a, wenn log. 1 = 10,0000000. Alſo log. d = log. $\left(\frac{b.\ c}{a}\right)$ = log. $\left(b\ c.\ \frac{1}{a}\right)$ = log b + log. c + Compl. log. a (§. 113).

Z. B. 20 ℔ kosten 82 ℳ, was kosten 1200 ℔?

20 : 82 = 1200 : d

Compl. log. 20 = 8,698970

log. 82 = 1,913814

log. 1200 = 3,079181

log. d = log. $\frac{82 \cdot 1200}{20}$ = 3,691965

wozu der gesuchte Preis = 4920 ℳ gehört.

## §. 117.

**Zu zwey Zahlen a und c die mittlere geometrische Proportionalzahl b durch Logarithmen zu finden.**

1 Man addire die Logarithmen der beyden gegebenen Zahlen a und c.

2) Die Summe dieser Logarithmen log. a + log. c dividire man durch 2, so hat man den Logarithmen der mittlern Proportionalzahl b oder log.

$$b = \frac{\log. a + \log. c}{2}$$

**Beweis.** Da b die mittlere Proportionalzahl zwischen a und c ist, so hat man a : b = b : c (§. 73. 96) also $ac = b^2$ (§. 78) und wenn man Logarithmen gebraucht log. a + log. c = 2 log. b (§. 113. 115) und wenn man durch 2 dividirt $\frac{\log. a + \log. c}{2}$ = log. b (§. 6 Grundsl. 4).

Man verlangt die mittlere Proportionalzahl zwischen 81 und 729 zu wissen, so ist

$$81 : b = b = 729.$$

$$\text{Log. } 81 = 1{,}908485$$
$$\text{Log. } 729 = 2{,}862728$$

$$\text{Log. } (81.729) = 4{,}771213$$
$$\text{Log. } \left(\frac{81\ 729}{2}\right) = 2{,}385606 = \text{Log. } b.$$

Zu diesem Logarithmen gehört 243, welches auch die mittlere Proportionalzahl zwischen 81 und 729 ist; denn $81 : 243 = 243 : 729$.

## §. 118.

Nach dem, was vorhin bewiesen worden, ist der Logarithme eines Quotienten $\frac{a}{b} = \text{Log. } a - \text{Log. } b$ (§. 114.). Wenn nun der Dividendus kleiner als der Divisor oder $\frac{a}{b}$ ein eigentlicher Bruch ist (§. 26), so ist auch Log. a kleiner als Log. b. Man muß also den Logarithmen eines eigentlichen Bruchs mit dem Subtractionszeichen — bezeichnen. Z. B. $\text{Log. } \frac{5}{7} = \text{Log. } 5 - \text{Log. } 7$.

$$\text{Log. } 5 = 0{,}698970$$
$$\text{Log. } 7 = 0{,}845098$$

$$\text{Log. } \tfrac{5}{7} = -0{,}146128$$

Weil

Weil der Logarithme des Zählers 5 kleiner ist als der Logarithme des Nenners, so kann letzterer nicht von ersterem abgezogen werden; sondern man muß ersterm vom letztern abziehen und der Unterschied wird deßhalb mit — bezeichnet.

## §. 119.

Die gemeinen oder Briggischen Logarithmen, bey welchen log. 1 = 0 und die Grundzahl = 10 ist (§. 111), haben den Vortheil, daß man die Kennziser verändern kann, ohne daß deßhalb die Mantissa verändert werden darf. Vermehrt man die Kennziser des Logarithmen mit 1, so wird dadurch die Zahl mit 10 multiplicirt, vermehrt man sie mit 2, 3 u. s. w. so wird die Zahl 100, 1000 u. s. w. mal größer. Z. B. log. 5 = 0,698970, log. 50 = log. (5.10) = log. 5 + l. 10 (§. 113) = 0,698970 + 1,000000 = 1,698970. Eben so log. 500 = log. (5. 100) = log. 5 + log. 100 = 0,698970 + 2,000000 = 2,698970 u. s. w.

Wenn man von der Kennziser eines Logarithmen 1, 2, 3, u. s. w. subtrahirt, so dividirt man dadurch die Zahl durch 10, 100, 1000 u. s. w., z. B. log. 12956 = 4,112471, woraus folgt, daß log. $(\frac{12956}{10})$ = log. 1295,6 = log. 12936 — log. 10 (§. 114) = 4,112471 — 1,000000 = 3,112471. Ferner log. $\frac{12956}{100}$ = log. 129,56 =

log. 12956 — log. 100 = 4,112471 — 2,000000 = 2,112471 und auf eben die Weise log. 12,956 = 1,112471 und log. 1,2956 = 0,112471.

## §. 120.

Die Logarithmen der eigentlichen Brüche werden mit — bezeichnet, wenn die Kennziser von log. 1 = 0 oder log. 1 = 0,000000 ist (§. 118). Dies verursacht einige Unbequemlichkeit und Beschwerlichkeit bey Berechnungen, welcher man ausweicht, wenn man die Kennziser von log. 1 statt = 0 nun = 10 setzt oder log. 1 = 10,000000 annimmt, weßhalb die Logarithmen in den Tafeln in Absicht auf die Kennziser folgendergestalt zu verändern sind:

| Zahlen. | Logarithmen der Tafeln. | Angenommene Logarithmen |
|---|---|---|
| 10000 | 4,000000 | 14,000000 |
| 1000 | 3,000000 | 13,000000 |
| 100 | 2,000000 | 12,000000 |
| 10 | 1,000000 | 11,000000 |
| 1 | 0,000000 | 10,000000 |
| 0,1 | — 1,000000 | 9,000000 |
| 0,01 | — 2,000000 | 8,000000 |
| 0,001 | — 3,000000 | 7,000000 |
| 0,0001 | — 4,000000 | 6,000000 |

So oft unter dieser Bedingung die Kennziser 10 übersteigt, so weiß man, daß die zum Logarithmen gehörige Zahl größer als 1 ist; aber diejenigen Logarithmen,

rithmen, deren Kennziser kleiner als 10 ist, sind Logarithmen von Decimalbrüchen und wenn die Kennziser = 9 ist, so weiß man, daß die zum Logarithmen gehörige Zahl kein Ganzes sondern Zehntheile enthält. Ist die Kennziser = 8, so hat die Zahl nur Hundertheile, ist die Kennziser = 7, so hat die Zahl nur Tausendtheile u. s. w. Dies wird noch deutlicher durch das Beyspiel der Zahl 620600, welche immer durch 10 dividirt wird.

| Zahlen. | Logarithmen. | Zahlen. | Logarithmen. |
|---|---|---|---|
| 620600 | 5,792812 | 6,206 | 0,792812 |
| 62060 | 4,792812 | 0,6206 | 9,792812 |
| 6206 | 3,792812 | 0,06206 | 8,792812 |
| 620,6 | 2,792812 | 0,006206 | 7,792812 |
| 62,06 | 1,792812 | 0,0006206 | 6,792812 |

Hieraus begreift man zugleich, warum die Logarithmen der trigonometrischen Linien Sinus und Cosinus, welche Decimalbrüche des Radius sind, 9, 8, 7 u. s. w. zur Kennziser haben, welches sonst unbegreiflich wäre.

Aus dem Vorhergehenden folgt: 1) daß wenn ein Logarithme 2,3499562 gegeben ist, man leicht die dazu gehörige Zahl in ganzen Zahlen und Decimalbrüchen finden könne, wenn man nur den Logarithmen unter einer höhern Kennziser z. B. 4 in den Tafeln aufsucht. Es sey 4,3499562 = 22385, so ist, wenn man 2 von der Kennziser ab-

nimmt und die Zahl 22385 durch 100 dividirt, log. 223,85 = 2,3499562. 2) zu einer aus ganzen Zahlen und Decimalbrüchen bestehenden Zahl z. B. 52,495 findet man den Logarithmen, wenn man zu der gegebenen Zahl als einer ganzen Zahl den Logarithmen aufsucht. log. 52495 = 4,7201179, weil aber die Zahl 3 Decimalstellen hat, so muß man sie durch 1000 dividiren und von der Kennzifer 3 abnehmen; also log. 52,495 = 1,7201179.

§. 121.

**Den Logarithmen eines gegebenen gemeinen Bruches oder eines Decimalbruches unter der angeführten Bedingung zu finden.**

1) Eines gemeinen Bruches, z. B. $\frac{4}{7}$. Man vermehre die Kennzifer des Logarithmen des Zählers 4 = 0,602060 mit 10. Dies gibt log. 4 = 10,602060, wovon man den Logarithmen des Nenners 7 = 0,845098 subtrahiren muß. Der Rest ist der verlangte Logarithme von $\frac{4}{7}$. Eben so erhält man den Logarithmen von $\frac{7}{12}$, nämlich:

log. 7 = 10,845098
log. 12 = 1,079181

log. $\frac{7}{12}$ = 9,765917.

Beweis. Weil $\frac{7}{12}$ ein Quotient ist, so ist 12 : 7 = 1 : $\frac{7}{12}$ (§. 75. Num. 4) und, wenn man Logarithmen

richten gebraucht, log. 12 — log. 7 = log. 1 — log. $\frac{7}{12}$ (§. 111); folglich log. 12 + log. $\frac{7}{12}$ = log. 7 + log. 1 (§. 71) und, wenn man auf beyden Seiten log. 12 subtrahirt, log. $\frac{7}{12}$ = log. 7 + log. 1 — log. 12 (§. 6. Grundsatz 4). Weil man nun log. 1 = 10,000000 annimmt (§. 120), so folgt, daß man die Kennziser des Logarithmen des Zählers mit 10 vermehren, und von diesem den Logarithmen des Nenners subtrahiren müsse.

**Anmerk.** Wenn man 9,765917 als den Logarithmen eines Decimalbruchs mit Zehn-, Hundert- u. s. w. Theilen ansieht (§. 120), und die zum Logarithmen gehörige Zahl in den Tafeln aufsucht, so wird man finden, daß 9,765917 = log. 0,58333 ist, welches gerade der Decimalbruch ist, in welchen man nach den bekannten Regeln (§. 55) $\frac{7}{12}$ verwandeln könnte. Also kann man auch nach den hier erklärten Regeln durch Hülfe der Logarithmen einen gemeinen Bruch in einen Decimalbruch verwandeln.

2) **Eines Decimalbruchs**, z. B. 0,92. Man nehme die Kennziser von log. 1 = 10 an, suche unter dieser Bedingung den Logarithmen des Zählers 92 = 11,963788 und subtrahire von der Kennziser so viele Einheiten, als der Bruch Decimalen

einmalen hat, nämlich hier 2; folglich ist log. 0,92 = 9,963788. Auf eben die Art findet man log. 0,00638 = 7,804821.

**Beweis.** Man verlangt den Logarithmen von 0,00638 oder eines Quotienten $\frac{638}{100000}$; also 100000 : 638 = 1 : 0,00638 (§. 75) und in Logarithmen ausgedrückt log. 100000 — log. 638 = log. 1 — log. 0,00638; folglich log. 100000 + log. 0,00638 = log. 638 + log. 1 und wenn man log. 100000 subtrahirt, log. 638 + log. 1 — log. 100000 = log. 0,00638, woraus die gegebenen Regeln folgen.

**Anmerk.** Wenn 0,000000476 gegeben ist, so ist log. 476 = 12,677607 (die Kennziser 10 größer angenommen). Von der Kennziser subtrahire man 9 als die Zahl der Decimalen des gegebenen Bruchs, so ist log. 0,000000476 = 3,677607. Aber es kann doch Fälle geben, wo man den Logarithmen eines Decimalbruchs mit — bezeichnen muß, wenn gleich die Kennziser von log. 1 = 10 angenommen wird. Z. B. in dem log. 0,00000000004 = 10,602060 müßte man von der Kennziser 11 subtrahiren, welches doch nicht angehet. In solchen Fällen nimmt man die Kennziser von log. 1 = 100 an, und subtrahirt davon 11, welches log. 0,00000000004 = 89,602060 gibt.

§. 122.

§. 122.

**Wenn ein Logarithme 5,418673 gegeben ist, welcher, wie man aus der Natur der Rechnung schließen kann, zu einem Decimalbruch gehört, den dazu gehörigen Decimalbruch zu finden.**

Man suche in den Tafeln eine ganze Zahl auf, welche mit den Decimalen des Logarithmen übereinstimmt. Man findet 5,418673 = log. 2622. Weil der Kennzifer des gegebenen Logarithmen zu 9 noch 4 fehlt, so setze man 4 Nullen voran und der gesuchte Decimalbruch wird = 0,00002622 seyn (§. 120). Eben so findet man 9,4592731 = log. 0,28792 und 8,0345672 = log. 0,010828.

§. 123.

**Durch Hülfe der Logarithmen Brüche mit Brüchen zu multipliciren.**

Man suche die Logarithmen der Brüche (§. 121) und addire diese. Von der Kennzifer der Summe der Logarithmen subtrahire man 10 (§. 120), so ist der Rest der Logarithme des Products (§. 113).

| | |
|---|---|
| log. $\frac{2}{3}$ = 9,823909 | log. 0,23 = 9,361728 |
| log. $\frac{3}{4}$ = 9,875061 | log. 0,042 = 8,623249 |
| log. $\frac{6}{12}$ = 9,698970 | log. 0,00966 = 7,984977 |

§. 124.

**Durch Hülfe der Logarithmen Brüche durch Brüche zu dividiren.**

Man vergrößere die Kennziser des Logarithmen des zu dividirenden Bruchs um 10 und subtrahire davon den Logarithmen desjenigen Bruchs, welcher Divisor ist; der Rest ist der Logarithme des Quotienten.

| | |
|---|---|
| Log. $\frac{7}{8}$ = 19,942008 | Log. 0,27 = 19,431364 |
| Log $\frac{2}{11}$ = 9,124939 | Log. 0,389 = 9,589950 |
| L. $(\frac{7}{8} : \frac{2}{11})$ = 10,817069, wozu 6,562 gehört. | Log. 06941 = 9,841414 |

**Beweis.** Wie sich der Divisor zum Dividendus verhält, so verhält sich die Einheit zum Quotienten (§. 75); $\frac{2}{11} : \frac{7}{8} = 1 : x$ und, in Logarithmen ausgedrückt, Log. $\frac{2}{11}$ − Log. $\frac{7}{8}$ = Log. 1 − Log. x; also Log. $\frac{2}{11}$ + Log. x = Log. $\frac{7}{8}$ + Log. 1 (§. 71); also Log. x = Log. $\frac{7}{8}$ + Log. 1 − Log. $\frac{2}{11}$. Weil nun Log. 1 = 10,000000 angenommen wird, so wird zur Kennziser von Log. $\frac{7}{8}$ 10 addirt und davon nachher der Logarithme des Divisors $\frac{2}{11}$ subtrahirt.

## §. 125.

Um zu bestimmen, wie viel ein Kapital mit Zinsen und Zinsen auf Zinsen nach einer gewissen Anzahl von Jahren betrage, kann man mit Vortheil die Logarithmen gebrauchen. Man fragt, wie groß ist ein Kapital mit Zinsen und Zinsen auf Zinsen nach 50 Jahren zu 4 p. C.? Nach den vorhin (§. 107) gegebenen Regeln muß man 1,04 funfzigmal mit sich selbst multipliciren

tipliciren und dies Product wieder mit dem Kapital. Aber 1,04 funfzigmal mit sich selbst multipliciren heißt den Logarithmen von 1,04 funfzigmal nehmen oder mit 50 multipliciren und dazu den Logarithmen des Kapitals addiren (§. 113. 115). Damit die Fehler in den letzten Decimalen die Rechnung nicht unsicher machen, muß man Logarithmen mit vielen Decimalen nehmen. Die Rechnung wird folgender Maaßen durch Logarithmen geführt.

log. 1,04 = 0,0170333393
50

50. log. 1,04 = 0,8516669650
log. 10000 = 4,0000000000

50. log. 104 + log. 10000 = 4,8516669650.

Zu diesem Logarithmen gehört die Zahl 71066,83346, und so viel Rthlr. beträgt ein Kapital von 10000 rc. mit Zinsen und Zinsen auf Zinsen zu 4 p. C. nach 50 Jahren.

§. 126.

Auch bey der Reduction eines Fußmaaßes auf ein anderes können die Logarithmen mit Vortheil gebraucht werden. Durch Vergleichung der besten Originalen habe ich gefunden, daß, wenn der dänische oder rheinländische Fuß in 10000 Theile getheilt wird, der französische Fuß solcher Theile 10353, der englische 9714 und der schwedische 9461 enthält.

Wenn

Wenn nun eine Länge in französischem Fußmaaße bestimmt werden soll, so wird selbige mit einem längern Maaßstabe gemessen und die Anzahl der französischen Fuße muß kleiner ausfallen; wollte man aber auch dieselbe Länge in dänischen Fußen wissen, so muß man mit einem kleinern Maaßstabe messen und folglich die Zahl der Fuße größer finden. Bey der Reduction des Fußmaaßes gebraucht man also die verkehrte Regula Detri (§. 82. 102). Man nenne eine gewisse in dänischen Fußen ausgedrückte Länge = d, in französischen = f, in englischen = e, in schwedischen = s. Will man nun dänische Fuße in französische verwandeln, so ist $10353 : 10000 = d : f$ (§. 102); also $\frac{10000\,d}{10353} = f$ oder $\left(\frac{10000}{10353}\right) \cdot d = f$. Der Bruch $\frac{10000}{10353}$ ist also eine unveränderliche und beständige Größe, mit der man die gegebenen dänischen Fuße d zu multipliciren hat, um sie in französische = f zu verwandeln. Will man nun Logarithmen gebrauchen, so ist

$\log.\left(\frac{10000}{10353}\right) + \log. d = \log. f.$

$\log. 10000 = 14{,}0000000$ (§. 120)

$\log. 10353 = 4{,}0150662$

$\log.\left(\frac{10000}{10353}\right) = 9{,}9849338$ (§. 121).

Hieraus folgt, daß $9{,}9849338 + \log. d = \log. f$ ist, oder daß man zu dem beständigen Logarithmen

men 9,9849338 nur den Logarithmen der gegebenen dänischen Fuße zu addiren brauche, um den Logarithmen der gesuchten französischen Fuße zu erhalten. Z. B. wie viel französische Fuß enthält eine dänische Meile oder 24000 dänische Fuß?

$$\log. \frac{10000}{10353} = 9,9849338$$
$$\log. 24000 = 4,3802112$$
$$\log. f = 4,3651450.$$

Also sind 23181,65 französische Fuß so groß als 24000 dänische.

Will man französische Fuß auf dänische reduciren, so erhält man folgende Proportion: 10000 : 10353 = f : d; also $d = \frac{10353}{10000}.f$. Aber $\log. \frac{10353}{10000} = 0,0150662$; also $0,0150662 + \log. f = \log. d$. Als ein Beyspiel will ich hier eine Messung des französischen Astronomen Picard anführen. Dieser Gelehrte ward im Jahre 1672 nach Dänemark gesandt, um durch astronomische Observationen die Länge und Breite von Uranienburg, dem berühmten Observatorium des Tygo de Brahe, zu bestimmen. Bey dieser Gelegenheit nahm er verschiedene Messungen vor und fand, daß die Entfernung des Kopenhagener Observatoriums vom Thurme in Landskrone 13651,2 Toisen oder französische Klafter beträgt. Es wird gefragt, wie groß diese Entfernung in dänischen Klaftern ist?

log. 13651,2 = 4,1351709
log. $\frac{10353}{10000}$ = 0,0150662

log. d = 4,1502371

wozu 14133,1 dänische Klafter gehören. Meine trigonometrischen Aufmessungen, welche ich in den Jahren 1765 und 1766 an der Ostküste von Seeland vornahm und durch die ich zugleich die merkwürdigsten Puncte an der schoonischen Küste bestimmte, gaben mir den Abstand des Observatoriums in Kopenhagen von dem Thurme in Landskrone = 14132,2 Klafter. Der Unterschied beträgt also nur $\frac{9}{10}$ Klafter oder 5,4 Fuß.

Will man wissen, wie viel eine in dänischen Fußen bestimmte Länge = d nach englischem Fußmaaße = e betrage, so ist 9714 : 10000 = d : e, also $\frac{10000}{9714}$ . d = e und, weil log. $\frac{10000}{9714}$ = 0,0126019, so ist 0,0126019 + log. d = log. e; wenn man aber englisches Fußmaaß in dänisches verwandeln will, so ist 10000 : 9714 = e : d, also log $\frac{9714}{10000}$ + log. e = log. d = 9,9873981 + log. e.

Verlangt man zu wissen, wie viel eine in dänischem Maaße angegebene Länge = d in schwedischem Fußmaaße = s ausmache, so ist 9461 : 10000 = d : s; aber log. $\frac{10000}{9461}$ = 0,0240629, also 0,0240629 + log. d = log. s. Soll aber schwedisches Maaß in dänisches verwandelt werden, so ist 10000 : 9461 = s : d und 9,9759370 + log. s = log. d.

Die

# Die ebene Geometrie.

## Erstes Kapitel.

### Erste Grundbegriffe der Geometrie.

§. 1.

Wenn man eine Größe in so fern betrachtet, als sie aus mehrern zusammenhängenden Theilen bestehet, deren einer an der Seite des andern liegt, so daß wo der eine Theil aufhört, der andere unmittelbar anfängt, so heißt dies eine **Ausdehnung** oder **Extension**. Die **Geometrie** ist eine Wissenschaft, welche von der Natur, Ausmessung und Berechnung der Ausdehnung handelt.

§. 2.

Hat die geometrische Ausdehnung drey Dimensionen oder Länge, Breite und Dicke, so heißt sie ein **geometrischer Körper**. Dieser ist von dem physischen Körper ganz verschieden. Der physische Körper besitzt außer der Ausdehnung zugleich Undurchdringlichkeit, Schwere und andere Eigenschaften. Abstrahirt man von dem Materiellen des physischen Körpers und denkt sich nur den Raum, den derselbe einnimmt, so hat man den Begriff des geometrischen Körpers. Hat die geometrische Ausdehnung nur zwey Dimensionen,

oder

oder ist sie nur der Länge und Breite nach ausgedehnt, ohne Dicke zu haben, so ist sie eine **Fläche**. Das feinste Papier ist nur noch ein unvollkommenes Bild der geometrischen Fläche, weil dasselbe doch einige obgleich wenige Dicke hat. Hat die geometrische Ausdehnung nur eine Dimension, oder ist sie nur der Länge nach ausgedehnt, ohne Breite und Dicke zu haben, so heißt sie eine **Linie**. Ein Bild derselben ist der feinste auf Papier gezogene Strich. Nach diesen verschiedenen Dimensionen theilt sich die Geometrie in zwey Theile. Die **ebene Geometrie** handelt von den Eigenschaften und der Berechnung der Linien und Flächen. Die **Stereometrie** erklärt die Natur und Ausmessung der geometrischen Körper.

## §. 3.

In andern Hinsichten hat man verschiedene andere Eintheilungen der Geometrie gemacht. Die **Elementar-Geometrie** beschäftigt sich mit solchen Lehrsätzen und Aufgaben, welche sich durch gerade Linien und den Kreis beweisen lassen. Zu der **höhern Geometrie** gehören alle Sätze, welche sich nicht durch den Kreis und gerade Linien beweisen lassen, sondern durch Hülfe krummer Linien, der Parabel, Hyperbel und Ellipse, welche man **Kegelschnitte** nennt, oder durch andere krumme Linien, z. B. die Cissoide, Concholde, Cycloide u. s. w. aufgelöset werden müssen. Man ersieht daraus,

aus, daß die Theorie der krummen Linien (der Kreis ausgenommen) in die höhere Geometrie gehört. In anderer Hinsicht kann man noch die Geometrie in die theoretische und practische eintheilen.

Die theoretische Geometrie handelt von der Natur und Vergleichung der Ausdehnungen: Die practische Geometrie bringt die theoretische in Anwendung und bestimmt die Größe wirklich vorhandener Ausdehnungen und zwar entweder nur auf dem Papier, wo sie dann schlechtweg die practische Geometrie heißt, oder auf der Oberfläche der Erde und auf dem Felde, in welchem Fall sie die Feldmeßkunst genannt wird. Die speciale oder ökonomische Feldmeßkunst lehrt die Ausmessung, richtige Entwerfung und Abzeichnung einer Hof- oder Stadtflur auf der Karte und zwar so vollständig, daß man jeden Acker, jede Wiese, jedes Moor, jeden Wald u. s. w. einzeln darauf ausmessen und berechnen kann.

Die geographische Feldmeßkunst lehrt, wie man Karten über ganze Provinzen und Länder ausmessen und ausfertigen und diese nach ihrer wahren Lage auf der Erdfläche oder nach der Länge und Breite derselben auf der Karte zu entwerfen hat. Sie erfodert also viele künstliche Instrumente und nicht geringe Einsichten in die Astronomie und mathematische Geographie. Die Geodäsie handelt von der Eintheilung

der Figuren in gleich große oder verhältnißmäßige Stücke. Sie ist eigentlich ein Theil der practischen Geometrie und der specialen Feldmeßkunst und eine Anwendung derselben auf die **Austauschung** und **Vertheilung der Gemeinheiten**, durch welche alle diejenigen Grundstücke, welche vorher in der Gemeinheit zerstreut lagen, an einem Orte gesammelt werden, so daß die gesammelten Stücke an Größe und Güte den vorigen zerstreut liegenden Wiesen, Aeckern u. s. w. gleich sind. Weil die Natur und Güte der Erdarten so sehr verschieden sind, so ist diese Arbeit nicht bloß geometrisch, sondern beruhet auch auf die **richtige Taxation der Erdarten**, wodurch bestimmt wird, wie viel von den schlechtern Grundstücken man einer Tonne des besten Landes gleich zu setzen habe.

Die **Markscheidekunst** ist eine Anwendung der Geometrie zur Bestimmung der Lage und Tiefe der Gruben beym Bergbau und lehrt von einem Orte zu einem gegebenen andern Orte Schachten und Stollen führen.

## §. 4.

Der einfachste und durchaus untheilbare Theil der Ausdehnung ist der **Punct**, welcher also nicht aus Theilen bestehet, aber doch die wesentliche Eigenschaft hat, daß sein Ort im Raum bestimmt ist und darin ist ein gegebener Punct von allen andern Puncten unterschieden. Das Bild eines Puncts ist der

Ein-

Eindruck der feinsten Spitze im Papier. Wollte man dem geometrischen Puncte Theile oder auch nur die allergeringste Größe oder Ausdehnnng beylegen, so mußte dieselbe entweder Länge, oder Länge und Breite oder Länge, Breite und Dicke seyn und dann hörte der Punct auf ein Punct zu seyn und würde entweder eine Linie oder eine Fläche oder ein geometrischer Körper (§. 2).

§. 5.

Wenn ein Punct A sich von einem Orte im Raume A nach einem andern B hinbewegt (Taf. 1. Fig. 1.) oder von E nach H (Fig. 2) so ist der beschriebene Weg ACDB oder EFGH bloß nach der Länge ausgedehnt, ohne die geringste Breite oder Dicke zu haben. **Weil der Punct selbst keine Breite oder Dicke hat, so wird eine Linie beschrieben, wenn ein Punct sich von einem Orte zum andern bewegt.** Der Punct, welcher die Linie beschrieb, war anfangs in A oder E, darauf an jedem Orte der Linie und hörte endlich in B oder H auf sich zu bewegen. **Die äußersten Gränzen A und B oder E und H einer Linie sind also zwey Puncte, auch kann man allenthalben in einer Linie Puncte annehmen, z. B. C und D oder F und G;** aber dennoch muß man nicht die Linie als eine Sammlung mehrerer an einander liegender Puncte ansehen, weil niemals eine Ausdehnung nach der Länge entstehen

kann, wenn man auch noch so viel Puncte an einander legt, die gar keine Ausdehnung haben.

§. 6.

Eine **gerade Linie** A B (Taf. 1. Fig. 1.) ist eine solche, welche immer nach einer und derselben Gegend zwischen zwey Endpuncten A und B ausgestreckt liegt. Eine **krumme Linie** E F G H (Fig. 2.) ist diejenige, welche nicht immer nach einer und derselben Gegend zwischen ihren äußern Puncten E und H ausgestreckt liegt; eine krumme Linie hat also Biegungen oder Krümmungen, wie z. B. E F G und F G H.

§. 7.

Aus dieser Erklärung folgt:

1) **Zwischen zwey Puncten** A **und** B (Fig. 1.) **liegt nur eine einzige gerade Linie**; denn könnten mehr gerade Linien als A B zwischen denselben liegen, so müßten sie entweder oberhalb oder unterhalb A B liegen; aber in keinem dieser Fälle lägen sie gerade ausgedehnt zwischen den Endpuncten A und B und wären also keine gerade sondern krumme Linien.

2) **Wenn zwey gerade Linien** A B **und** D E (Fig. 3.) **sich durchkreuzen, so schneiden sie sich in einem Puncte** C; denn wäre C kein Punct, sondern eine Linie, so würde dieselbe eine

Länge

Länge haben und zwar entweder von C nach B und dann würde die Linie DE eine Breite haben oder von C nach E und dann müßte die Linie AB eine Breite haben. Weil aber diese Linien keine Breite haben (§. 2. 5), so kann der Durchschnitt auch keine Länge weder nach B noch nach E haben. Derselbe hat also keine Theile und ist also ein Punct (§. 4).

5) **Zwey gerade Linien können keinen Raum einschließen**; denn zwischen zwey Puncten A und B läßt sich nur eine einzige gerade Linie ziehen und alle andere gerade Linien, welche man zwischen denselben Puncten ziehen will, fallen mit der ersten Linie zusammen.

4) Zwey krumme Linien ACB und ADB (Fig. 4) können einen Raum einschließen, wenn sie sich in zwey Puncten A und B schneiden, ja eine einzige krumme Linie kann einen Raum einschließen, z. B. der Kreis.

## §. 8.

**Eine ebene Fläche** (Ebene oder Plan) ist eine solche, in der alle gezogene Linien gerade Linien sind. **Eine krumme Fläche** heißt diejenige, in der alle gezogene Linien nicht gerade Linien sind, sondern deren einige oder alle krumm sind.

§. 9.

Wenn man von einem Puncte A (Fig. 5.) in einer ebenen Fläche zwey gerade Linien AC und AB zieht, so nennt man die Neigung dieser beyden geraden Linien gegen einander **einen geradlinichten ebenen Winkel.** Die beyden Linien AC und AB, welche diesen Winkel bilden, heißen seine **Schenkel** und der Punct A, in welchen dieselben zusammentreffen, **die Spitze des Winkels.** Einen Winkel bezeichnet man entweder mit drey Buchstaben, von welchen der an der Spitze desselben in die Mitte gestellt wird, z. B. CAB oder auch mit einem einzigen kleinen Buchstaben, z. B. a, welchen man an die Spitze desselben setzt. Wenn man nur Einen Winkel hat, so kann derselbe auch mit einem einzigen Buchstaben an der Spitze bezeichnet werden, z. B. A.

§. 10.

Wenn man von einem Puncte C in einer geraden Linie AB (Fig. 6.) eine gerade Linie CD ziehet, so heißen die Winkel ACD und DCB oder x und o **Nebenwinkel.** Solche Winkel haben Einen Schenkel CD gemeinschaftlich und die beyden andern machen eine gerade Linie aus.

§. 11.

Wenn eine gerade Linie CD (Fig. 7.) dergestalt auf einer andern geraden Linie AB steht, daß sie sich

eben

eben so wenig zur einen als zur andern Seite neigt, so heißt sie eine **lothrechte** oder **Perpendikular-Linie** auf AB. Hieraus folgt, daß die Neigung der Linie DC gegen AC eben so groß ist als die Neigung von DC gegen CB. Beyde Nebenwinkel sind also gleich oder ACD = DCB (§. 9. 10) und unter dieser Bedingung heißen sie **rechte Winkel.**

Eine Linie steht schief auf einer andern, z. B. CD auf AB (Fig. 8), wenn die Nebenwinkel ungleich sind und der eine ACD größer als der andere DCB ist. Die Nebenwinkel heißen dann **schiefe Winkel.** Ein **spitzer Winkel** ist ein schiefer Winkel, der kleiner als ein rechter ist, z. B. DCB; ein **stumpfer Winkel** ist größer als ein rechter, wie ACD. Die rechten Winkel sind ACE und ECB.

§. 12.

Eine **Figur** ist ein an allen Seiten von Linien begränzter Raum. Eine **ebene Figur** ist eine in Linien eingeschlossene ebene Fläche. Eine **krummlinichte ebene Figur** ist eine Fläche, welche von Einer oder mehrern krummen Linien begränzt ist. Eine **geradlinichte ebene Figur** hat zu Gränzen gerade Linien, aber mehr als zwey (§. 7). **Seiten einer geradlinichten Figur** heißen die geraden Linien, welche eine Figur einschließen und bilden. Eine **dreyseitige Figur** hat drey, eine **vierseitige** vier und eine **vielseitige Figur** oder ein Polygon mehr als vier Seiten.

## §. 13.

Wenn eine gerade Linie AC (Fig. 9.) sich um den einen Punct C, den man als fest und unbeweglich annimmt, herumdreht, so wird der andere Endpunct A, indem er sich rund herum durch D, E, G, F, H und wieder zurück nach A bewegt, eine in sich selbst zurücklaufende krumme Linie ADEGFHA beschreiben, welche ein **Kreis, Cirkel,** heißt. Ein Kreis ist also eine ebene in eine in sich selbst zurückkehrende krumme Linie eingeschlossene Figur. Alle Puncte im Kreise liegen von einem unbeweglichen und mittelsten Puncte, welcher daher auch der **Mittelpunct** oder das **Centrum** heißt, gleich weit entfernt. **Umkreis** oder **Peripherie** heißt die in sich selbst zurückkehrende krumme Linie, welche die Cirkelfläche begränzt. **Radien** oder **Halbmesser** sind gerade Linien, welche vom Mittelpunct des Kreises zu jedem beliebigen Puncte in der Peripherie gezogen werden können, wie CA, CD u. s. w. **Durchmesser** oder **Diameter** ist jede gerade Linie, welche durch den Mittelpunct des Kreises geht und deren äußerste Puncte in der Peripherie liegen, wie ECA. **Chorde** oder **Sehne** ist eine gerade Linie GH, welche von einem Puncte der Peripherie zu einem andern gezogen ist; jeder Durchmesser ist also eine Chorde, aber nicht umgekehrt jede Chorde ein Durchmesser. Ein **Kreisbogen** ist jeder Theil des Kreises, z. B. ADE. Ein **Kreisausschnitt** oder **Sector** ist ein Raum

ACD,

ACD, von zwey Halbmessern CA und CD, welche einen Winkel bilden, und dem zwischen ihnen liegenden Kreisbogen AD begränzt. Ein **Kreisabschnitt** oder **Segment** GFH ist von der Chorde GH und dem Bogen GFH begränzt.

## §. 14.

Aus der Natur des Kreises folgt:

1) **Daß alle Halbmesser in einem Kreise gleich sind.** CA = CD = CE (Fig. 9), denn sie sind gleichsam nur eine und dieselbe Linie CA, welche durch A, D und E sich bewegte.

2) **Der Durchmesser ist zweymal so groß als der Halbmesser** oder AE = 2 CA, denn AE = EC + CA = CA + CA = 2 CA.

3) **Alle Durchmesser im Kreise sind gleich groß,** MN = PO (Fig. 10), denn MN = MC + NC und OP = CO + CP, aber MC + NC = CO + CP; also MN = OP.

## §. 15.

Die Geometrie setzt folgende **Heischesätze** oder **Postulata** voraus:

1) **Von einem Puncte zum andern eine gerade Linie zu ziehen.** Weil die geometrische Ausdehnung und der Raum vollkommen durchdringlich sind, so kann man nicht die Möglichkeit leug-

nen, daß ein Punct von einem Orte zu einem andern im Raume sich bewegen könne. Wenn man die Seite des Lineals an die beyden gegebenen Puncte bringt, so zieht man die Linie, indem man immer der Schärfe des Lineals folgt, mit der Reißfeder, Schreibfeder oder einem Bleystift.

2) **Eine gegebene gerade Linie läßt sich zu beyden Seiten verlängern.** Man lege das Lineal so genau als möglich mit seiner scharfen Seite an die gegebene Linie und verlängere diese dann nach der Schärfe des Lineals zu beyden Seiten.

3) **Um jeden gegebenen Punct kann man mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis beschreiben.** Das Instrument, welches dazu dient, heißt der **Zirkel**, wenn es zu kleinen, **Stangenzirkel** aber, wenn es zu größern Kreisen gebraucht wird. Die eine feststehende Zirkelspitze gibt den Mittelpunct und die andere, wenn der Zirkel um den gegebenen Radius geöfnet ist, wird um den gegebenen Punct herumgeführt und beschreibt den Kreis (§. 13).

4) Mit Hülfe des Zirkels kann man eine Linie so lang als eine andere machen und von einer gegebenen Linie ein Stück so groß als eine andere gegebene Linie abschneiden.

Anmerk.

Anmerk. Eine Sammlung derjenigen Instrumente, welche zur Ziehung von Linien und Zeichnung von Winkeln und Figuren erfodert werden, heißt ein Besteck und besteht gewöhnlich aus folgenden Stücken: 1) der Reißfeder, um Linien mit Tusch zu ziehen; 2) dem Zirkel mit Setzstücken, um Kreise mit Tusch und Bleystift zu ziehen; 3) mehrern kleinern oder größern Zirkeln zur Ausmessung von Linien; 4) dem Winkelhaken, um senkrechte Linien zu ziehen und rechte Winkel zu zeichnen; 5) dem Winkelmesser oder Transporteur, zur Bestimmung der Größe der Winkel in Graden; 6) dem verjüngten Maaßstabe, der in ganze, halbe und viertel Decimalzolle eingetheilt ist. Ueber die Einrichtung und Beschaffenheit dieser Instrumente kann man nachsehen: Leupoldii Theatrum Arithmetico-Geometricum und Traité de la construction des instrumens de Mathematique par M. Bion, à la Haye 1723, von welchem Werke Doppelmayer eine Uebersetzung unter dem Titel: Mathematische Werkschule, Frankfurt 1712. mit verschiedenen Zugaben herausgegeben hat. Ferner Geometrie in Tabellen, Berlin 1755. pag. 28—33 und J. F. Penthers Praxis Geometriae, Augsburg 1752. §. 1—§. 41.

§. 16.

§. 16.

In der Geometrie macht man von denselben Grundsätzen oder Axiomen Gebrauch, welche in der Arithmetik von Größen überhaupt angeführt sind (§. 6. Arith.). Diese sind: Jede Größe ist sich selbst gleich; das Ganze ist so groß als alle Theile zusammengenommen; zwey Größen, welche einer dritten gleich sind, sind unter sich gleich; wenn gleiche Größen um gleich viel vermehrt oder vermindert werden, so bleiben sie noch gleich. Außer diesen Axiomen hat die Geometrie einen ihr eigenen **Grundsatz der Congruenz: zwey Ausdehnungen decken sich oder passen auf einander**, wenn, nachdem sie gehörig auf einander gelegt worden sind, ihre Gränzen auf einander treffen oder fallen.

§. 17.

**Wenn zwey gerade Linien AB und CD (Fig. 11) gleich sind, so decken sie sich.** Man stelle sich vor, daß der Punct A auf C und die Linie AB in die Lage CD gebracht werde. Weil B eben so weit von A entfernt ist als D von C, so muß nothwendig B auf D fallen. Zwischen diesen auf die Art zusammenfallenden Puncten, A auf C und B auf D, kann nur eine einzige gerade Linie liegen (§. 7.); also decken sich die geraden Linien AB und CD. **Wenn zwey gerade Linien sich decken, so sind sie gleich**, weil dann in Absicht auf ihre Größe eine für die andere gesetzt werden kann.

§. 18.

## §. 18.

**Wenn zwey Winkel** A B C **und** D E F (Fig. 12 u. 13.) **gleich sind oder** A B C = D E F, **so decken sie sich.** Man lege E auf B und E F auf B C. Weil nun die Neigung, welche A B gegen B C hat, eben so groß ist als die Neigung der Linie E D gegen E F, so muß E D auf B A fallen. Es ist nicht nöthig, daß D auf A falle, welches auch nicht geschehen kann, wenn nicht zugleich A B = D E ist. Da aber hier bloß von der Neigung der Linie die Rede ist, so ist es genug, daß nur ein Theil von D E auf A B falle, um zu bewirken, daß A B C = D E F ist.

**Umgekehrt, wenn zwey Winkel sich decken, so sind sie gleich.**

## §. 19.

**Wenn zwey Figuren sich decken, so sind sie gleich.** Der umgekehrte Satz, daß gleich große Figuren sich decken, läßt sich nicht allgemein erweisen; im Gegentheil wird man nachher sehen, daß viele Figuren ihrer Größe oder ihrem Inhalte nach gleich groß seyn können, ohne sich zu decken. Man kann sich leicht eine dreyseitige Figur denken, welche in Raum und Größe einer vierseitigen gleich ist, obgleich diese Figuren sich nie decken werden.

---

## Zweytes Kapitel.

### Eigenschaften der Winkel und schneidenden Linien.

§. 20.

Wenn man sich vorstellt, daß die Linie CB (Fig. 14.), deren Neigung gegen CA den Winkel BCA bildet, um C, die Spitze des Winkels, wie um einen Mittelpunct oder ein Gewinde, beweglich ist und sich auf CA niederlegen läßt, so ist es klar, daß beyde Linien, indem sie zusammenfallen, keinen Winkel bilden oder daß BCA = o ist. Nimmt man in diesen Linien einen Punct D an, so wird derselbe, wenn die Linie CEB wieder in ihre erste Lage gekommen ist, den Bogen ED beschrieben haben (§. 13). Kommt die bewegliche Linie CEB in F und bildet den Winkel ACF, so hat D den Bogen DEF beschrieben; kommt CEB in G und bildet den Winkel ACG, so hat D den Bogen DEFG beschrieben. Hieraus kann man den allgemeinen Satz herleiten, daß diese Bogen als das Maaß der genannten Winkel angesehen werden können und daß **die Größe eines Winkels sich durch den zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogen bestimmt.** Um dieses Maaß mit Worten auszudrücken, hat man die Peripherie des Kreises in 360

gleiche

gleiche Theile oder **Grade** eingetheilt. Ein Winkel beträgt 10 Grad, wenn der Bogen desselben 10 dieser gleichen Theile des Umkreises oder $\frac{10}{360} = \frac{1}{36}$ des Umkreises enthält. Ein Winkel ist 60 Grad groß, wenn seine Bogen 60 dieser Grade oder $\frac{60}{360} = \frac{1}{6}$ der ganzen Peripherie des Kreises beträgt. Der Grad wird in 60 **Minuten** und die Minute in 60 **Sekunden** eingetheilt und 50° 30′ 45″ lieset man 50 Grad 30 Minuten und 45 Sekunden.

**Anmerk.** Die Eintheilung des Kreises in 360 Grade haben schon die allerälteſten Aſtronomen vor mehr als 2000 Jahren gebraucht. (Plinii Hiſt. nat. Lib. II. Cap. 23 und Ptolomæi Almag. Lib. I. Cap. 9). Viel bequemer hätte man die Decimaleintheilung anwenden und die Peripherie in 100 Grade, den Grad in 100 Minuten und die Minute in 100 Sekunden eintheilen können. Die Urſache, warum die Alten 360 Grad wählten, iſt, daß dieſe Zahl ſich durch ſo viele einfache Zahlen (nur nicht durch 7) ohne Bruch theilen läßt. So iſt $\frac{360°}{9} = 40°$, $\frac{360°}{8} = 45°$, $\frac{360}{6} = 60$, $\frac{360°}{5} = 72°$, $\frac{360°}{4}$ $90°$, $\frac{360°}{3} = 120°$, $\frac{360°}{2} = 180°$.

Die Eintheilung des Kreiſes wird hauptſächlich

sich bey Instrumenten gebraucht, die zur Ausmessung der Winkel dienen, z. B. beym Transporteur, Astrolabium, dem geographischen Quadranten und Sectoren. Da, wie nachher bewiesen werden wird, der Radius der Sehne von $\frac{1}{6}$ der Peripherie gleich ist, so muß man zuerst den Halbmesser, mit welchem der Kreis beschrieben worden ist, auf die Peripherie desselben absetzen, wodurch man einen Bogen erhält, der dem sechsten Theile des Umfangs oder 60° gleich ist. Halbirt man diesen Bogen, so hat man 30° und halbirt man diesen wieder, so bekommt man 15°. Wollte man nun fortfahren zu halbiren, so würde man keinen ganzen Grad erhalten; man muß daher, um die Größe eines Grades herauszubringen, 15° in 3 Theile, jeden = 5°, theilen und diesen wieder in 5 Theile, welche Theilung aber freylich nicht so genau als die beständige Halbirung ist. Die neuern Englischen Künstler haben deswegen eine andere Theilungsmethode eingeführt. Sie nehmen den Umfang des Kreises = 384 Theile an; also $\frac{1}{4}$ = 96 und $\frac{1}{6}$ = 64 und folglich ist nach dieser Eintheilung der Radius der Sehne von 64° gleich. Dies hat den Vortheil, daß man durch beständiges Halbiren auf 1° kommen

kann,

kann, weil $\frac{64}{2} = 32$, $\frac{32}{2} = 16$, $\frac{16}{2} = 8$, $\frac{8}{2} = 4$, $\frac{4}{2} = 2$ und $\frac{2}{2} = 1$ (J. Bird Method of dividing astronomical Instruments London 1767). Auf allen Instrumenten von Wichtigkeit und hinlänglicher Größe gebraucht man eine doppelte Eintheilung, die eine in 90° und die andere in 96°, welche sich unter einander berichtigen und viel zur Genauigkeit der Instrumente beytragen. Der Grad nach der 90 Theilung verhält sich zum Grade nach der 96 Theilung = 90 : 96 = 15 : 16 und ein Grad nach der 96 Theilung ist = 56′ 15″ der 90 Theilung oder des gewöhnlichen Grades, auch kann man sich mit geringer Mühe Reductionstafeln von 96° zu 90° verfertigen und man ersieht leicht, daß 80° nach der 96 Theilung zu 75° der 90 Theilung, 64° zu 60°, 48° zu 45°, 32° zu 30° und 16° zu 15° gehört. Die Chineſen haben ſchon ſehr lange entweder aus eigenen oder aus den Beobachtungen älterer indiſcher Völker gewußt, daß die Sonne ihre Kreisbahn am Himmel in $365\frac{1}{4}$ Tagen vollendet und damit der tägliche Weg der Sonne Einen Grad ausmachen möchte, theilten ſie die Peripherie des Kreiſes in $365\frac{1}{4}$° ein, den Grad aber wieder in 100 Minuten und die Minute

in 100 Sekunden, so wie sie ebenfalls den Tag in 100 Kes und den Kes wieder in 100 Theile theilten (Observations astronomiques et chronologiques tirées des anciens livres Chinois p. Souciet. Tom. 3. Paris 1732. p. 51—56), woraus folgt, daß ein chinesischer Grad = 59′ 8″ des europäischen ist.

§. 21.

**Der Durchmesser AB (Fig. 17) theilt sowohl den Umfang als die Fläche des Kreises in zwey gleiche Theile.** Es soll bewiesen werden, daß der Bogen ADB = Bog. AEB und der Abschnitt ADBA = Abschnitt AEBA ist. Man falte oder biege den untern Theil des Kreises AEB um den Durchmesser AB auf die obere Hälfte desselben ADB. Weil nun der Mittelpunct C im Durchmesser liegt und jeder Punct im untern Bogen eben so weit von C entfernt liegt als jeder Punct im obern Bogen (§. 13), so wird jeder Punct in jenem Bogen, wie d, e, f, E u. s. w. einen Punct in diesem, z. B. a, b, c, D u. s. w. finden, mit welchem er zusammenfällt (§. 17), weil Cd = Ca, Ce = Cb, Cf = Cc, CE = CD u. s. w. ist; also deckt der untere Kreisbogen AEB den obern ADB (§. 16), der Bogen AEB ist also = Bog. ADB (§. 17) und der Durchmesser theilt den Umfang des Kreises in zwey gleiche Theile, so daß AEB = ADB = 180° ist (§. 20).

Ferner

Ferner, weil der Bogen AEB mit dem Bogen ADB und der Durchmesser mit sich selbst zusammen fällt, so fallen die Gränzen der beyden Halbkreise zusammen; diese decken sich also (§. 16) und sind gleich (§. 19) oder AEBA = ADBA.

## §. 22.

**Eine Linie AB (Fig. 18), welche die Kreisfläche oder die Peripherie in zwey gleiche Theile theilt, geht durch den Mittelpunct und ist ein Durchmesser.** Man nehme den Mittelpunct an, wo man will, z. B. in D und ziehe EDF, welches also ein Durchmesser ist (§. 13); also sind der Bogen und der Abschnitt EGF die Hälften der Peripherie und der Kreisfläche (§. 21). Aber vermöge der Bedingung ist AGB gleichfalls die Hälfte der Peripherie, also sind der Bogen und der Abschnitt AGB dem Bogen und dem Abschnitt EGF gleich (§. 6. Arith.) und die Linie EF fällt in AB und der angenommene Punct D muß, wenn er der Mittelpunct seyn soll, in AB liegen und folglich AB ein Durchmesser seyn (§. 13).

## §. 23.

**Wenn zwey Winkel ABC und DEF (Fig. 15 und 16) gleich sind, so müssen auch die zwischen den Schenkeln derselben mit gleichen Halbmessern beschriebenen Kreisbogen gleich seyn,** d. h.

Bog. GH = Bog. IK. Man lege den Punct E auf B und die Linie EK auf BH, so wird, weil EK = BH, K auf H fallen (§. 17). Weil nun ferner der Winkel E = B ist, so fällt EI auf BG (§. 18), und weil EI = BG, so fällt I auf G (§. 17). Da nun alle Puncte in den Bogen KI und GH von den auf einander gelegten Mittelpuncten E und B gleich weit entfernt sind, so decken sich diese Bogen (§. 16 und 21) und der Bogen IK ist daher dem Bogen GH gleich.

## §. 24.

Hieraus folgt, daß wenn DC (Fig. 19) auf AB senkrecht steht, oder die Nebenwinkel x und y gleich sind (§. 11) und man aus C als einem Mittelpuncte einen Halbkreis ADB beschreibt, so ist der Bog. AD = Bog. DB (§. 23) und folglich jeder derselben die Hälfte von 180° oder $x = y = \frac{180°}{2} = 90°$, d. h.

**jeder rechte Winkel hat zu seinem Maaße einen Bogen von 90°; ein spitzer Winkel ist kleiner und ein stumpfer Winkel größer als 90° (§. 11).**

**Anmerk.** Einen rechten Winkel z. B. x = y bezeichnet man mit R; also x = y = R.

## §. 25.

**Wenn die mit dem Radius EK = BH (Fig. 15 und 16) aus den Spitzen E und B beschriebenen und zwischen den Schenkeln der Winkel E und**

und B liegenden Bogen IK und GH gleich groß sind, so sind auch die Winkel B und E gleich.

Ist B nicht = E, so sey B > E oder B < E. Ist B > E, so muß auch der Bogen GH > IK seyn (§. 23); ist aber B < E, so ist auch der Bogen GH < IK, welches beydes aber gegen die Voraussetzung GH = IK und folglich unmöglich ist. Wenn also Bog. GH = Bog. IK, so ist weder B > E noch B < E, also B = E.

## §. 26.

Wenn zwey mit gleichen Halbmessern EK = BH (Fig. 15 und 16) beschriebene Kreisbogen GH und IK gleich sind, so sind auch ihre Chorden gleich oder IK = GH.

Man ziehe die Linien GB, HB, KE und IE. Weil nun nach der Voraussetzung Bog. GH = Bog. IK, so ist der Winkel B = E (§. 25). Auf eben die Art, wie beym Beweise §. 23, wird nun bewiesen, daß K auf H und I auf G fällt. Zwischen zwey Puncten läßt sich aber nur eine einzige gerade Linie ziehen (§. 7); also fällt die Chorde IK mit der Chorde GH zusammen; folglich ist IK = GH (§. 17).

## §. 27.

Wenn die Chorden zweyer Kreisbogen, die mit gleichen Halbmessern EK = BH beschrie-

ben sind, gleich sind oder IK = GH (Fig. 15 und 16), so sind auch die Kreisbogen IK und GH gleich.

Sind die Bogen IK und GH nicht gleich groß, so sey entweder IK > GH und also auch die Chorde IK > Chorde GH (§. 26) oder IK < GH und also auch die Chorde IK < Chorde GH (§. 26). Beydes widerspricht aber der Voraussetzung; also ist die Chorde IK weder > noch < GH, sondern IK = GH.

## §. 28.

Zwey Kreise AFBG und afbg (Fig. 20), welche aus demselben Mittelpunct aber mit ungleichen Halbmessern gezogen sind, heißen concentrische Kreise. Ein Theil des im größern Kreise gezogenen Durchmessers, nämlich ab, ist der Durchmesser des kleinern Kreises und daher theilt AB beyde Kreise in zwey gleiche Theile (§. 21), welches auch aus der Deckung der Halbkreise der größern sowohl als der kleinern klar ist. Zählt man die Grade von B im größern und von b im kleinern Kreise, so geht die Linie AB im größern Kreise bey A und im kleinern bey a durch 180 Grad.

Es sey GC senkrecht auf AB und der Bogen BG = AG = 90° (§. 24). Man lege die Kreise um GC zusammen, so werden nicht allein die Viertelstheile oder Quadranten des großen Kreises ACG und GCB, sondern auch die Quadranten des kleinen Kreises a[illegible]g und

bCg

bCg sich decken und der Bogen bg = Bog. ag = 90° (§. 23) seyn. **Die Linie GC, welche vom Puncte 90° oder G im großen Kreise zum Mittelpunct C gezogen wird, geht zugleich durch 90° oder g im kleinern Kreise.**

Man stelle sich vor, daß der Quadrant GB des größern Kreises in gewisse gleiche Theile, z. B. 3, GE = ED = DB = $\frac{90°}{3}$ = 30° eingetheilt sey. Von den Theilungspuncten ziehe man die Linien GC, EC und DC zum Mittelpuncte C. Man lege die Kreisausschnitte BCD und DCE um die Linie CD und dann um CE zusammen, so daß sie auf einander fallen, so werden sie sich decken (§. 26) und gleich seyn. Doch nicht allein die Kreisausschnitte BDC, DCE und ECG werden gleich seyn oder BDC = DCE = ECG, sondern auch bCd = dCe = eCg und die Bogen bd, de und eg sich decken, weil sie allenthalben gleich weit vom Mittelpuncte C abstehen; also auch bd = de = eg = $\frac{90°}{3}$ = 30°. Dies gilt nicht allein von 30°, sondern von allen andern gleichen Theilen, in welche man den größern Kreis eintheilen mag, so daß bd eben so viele Grade des kleinern Kreises enthält, als BD Grade des größern Kreises zählt. **Concentrische Kreisbogen BD und bd zwischen den Schenkeln CD und CB des Winkels DCB enthalten gleich viel Grade.**

**Anmerk.** Man mag nun auf dem Papier oder Felde die Größe eines Winkels mit einem Instrumente von einem größern oder kleinern Radius messen, so wird dieselbe immer gleich befunden werden, jedoch mit dem Unterscheide, daß je größer das Instrument ist, mit desto mehrerer Genauigkeit der Winkel bestimmt werden kann.

## §. 29.

**Mit Hülfe eines Transporteurs die Größe eines Winkels auf dem Papier zu messen.** Der Winkel sey A C B (Fig. 21).

1) Man lege den Mittelpunct des Transporteurs C an die Spitze des Winkels C und drehe dessen Radius so, daß er den Schenkel des Winkels C B deckt.

2) Man zähle die Grade von B an auf dem eingetheilten Rande bis zu dem Puncte, welcher auf dem andern Schenkel des Winkels A C liegt. Es fällt in die Augen, daß dieser Bogen das Maaß des gegebenen Winkels ist (§. 20. 28).

**Anmerk.** 1. Stünde der Winkel an der andern Seite, so müßte man die Grade von der linken Hand oder von E an zählen, aus welcher Ursache der Transporteur eine doppelte Eintheilung von der rechten zur linken Seite und von der linken

ken zur rechten Seite hat, wie auch die Figur zeigt. Man mag nun mit einem größern oder kleinern Instrumente messen, so muß dennoch dieselbe Größe gefunden werden (§. 28), jedoch mit dem Unterschiede, daß je größer der Radius ist, desto größer die Grade werden und sich die kleinern Theile des Winkels mit desto größerer Genauigkeit angeben lassen. So viel, als die Dicke der feinsten Linie beträgt, kann man indeß noch immer fehlen. Bey den gewöhnlichen Transporteuren von 2 Zoll im Radius beträgt die Unsicherheit $\frac{1}{15}$ Grad oder 12 Minuten. Wenn aber auch der Radius 6 Zoll beträgt und das Instrument mit einem Nonius versehen ist, so ist doch der kleinste merkliche Theil = 3 Minuten. Ueberdieß gibt es noch andere kleine Fehler, welche entstehen können, wenn man den Mittelpunct des Transporteurs und dessen Radius nicht genau an die Spitze und den einen Schenkel des Winkels anlegt.

**Anmerk.** 2. Will man einen Winkel von einer gegeben Anzahl Grade, z. B. 62° zeichnen, so zählt man von B nach A hinauf 62° und bemerkt den Punct A, durch welchen man die Linie AC zieht, wodurch ACB = 62° wird.

§. 30.

**An einem gegebenen Puncte E (Fig. 15 und 16) in einer gegebenen geraden Linie E F einen Winkel E zu zeichnen, der einem andern gegebenen Winkel B oder A B G gleich ist.**

1) Aus B als dem Mittelpuncte beschreibe man mit einem beliebigen Halbmesser B H den Bogen G H zwischen den Schenkeln A B und B C des gegebenen Winkels.

2) Aus E als dem Mittelpuncte beschreibe man mit dem Radius B H einen Bogen von unbestimmter Länge.

3) Man nehme die Chorde G H in den Zirkel und trage von K die Linie I K = G H.

4) Man ziehe die Linie E I D, so ist Winkel E = B.

**Beweis.** Vermöge der Construction ist die Chorde K I = H G; also Bog. K I = Bog. H G (§. 27); folglich auch E = B (§. 25).

§. 31.

**Wenn auf einer geraden Linie A B (Fig. 7 und 8) eine andere gerade Linie C D steht, so sind die beyden Nebenwinkel A C D und D C B zwey rechten Winkeln oder 180° gleich.**

Wenn C D auf A B senkrecht steht, so ist jeder der Nebenwinkel ein rechter Winkel oder A C D = D C B = R = 90° (§. 11. 28); also A C D + D C B =

2 R

$2R = 180°$ (§. 6. Arith. Grundſ. 4.). Steht aber CD nicht lothrecht auf AB, ſo denke man ſich EC lothrecht auf AB, ſo iſt $ACE + BCE = 2R$. Aber $ACE = p$ und $BCE = x + y$; alſo $p + x + y = 2R$; weil nun $p + x = ACD$ und $y = BCD$, ſo iſt auch $ACD + BCD = 2R = 180°$.

§. 32.

**Wenn zwey Winkel ACD und BCD (Fig. 22), welche eine gemeinſchaftliche Spitze C und einen gemeinſchaftlichen Schenkel CD haben, zwey rechten Winkeln gleich ſind, ſo machen die beyden andern Schenkel AC und CB eine gerade Linie aus.**

Man verlängere die Linie AC und laſſe ſie hinfallen, wohin ſie will und z. B. ACE ſeyn, ſo iſt $ACD + DCE = 2R$ (§. 31), weil ACE als eine gerade Linie angeſehen wird; aber vermöge der Vorausſetzung iſt $ACD + BCD = 2R$, alſo $ACD + DCE = ACD + BCD$ (§. 6. Arith.); ſubtrahirt man nun auf beyden Seiten $ACD = ACD$, ſo bleibt $DCE = DCB$ (§. 6. Arith.); alſo kann die Linie CE nirgends als in CB fallen (§. 18); alſo muß ACB eine gerade Linie ſeyn.

§. 33.

**Wenn man von einem Punete C (Fig. 23) aus mehrere gerade Linien ziehet, z. B. AC, BC, DC**

DC u. s. w., so machen alle Winkel um diesen Punct vier rechte Winkel aus, d. h. ACB + BCD + DCF + FCA = 4 R = 360°.

Wenn keine der Schenkel dieser Winkel eine gerade Linie ausmachen, so verlängere man einen derselben, z. B. AC nach G, wodurch der Winkel DCF in zwey Theile p und q getheilt wird. Da nun ACG eine gerade Linie ist, so hat man y + z + p = 2 R (§. 31.) und aus derselben Ursache q + x = 2 R; also, wenn man Gleiches zu Gleichem addirt, y + z + p + q + x = 4 R = 360° (§. 6. Grundsatz 4. Arith.)

## §. 34.

Wenn zwey gerade Linien AB und CD (Fig. 24.) sich in E durchkreuzen, so heißen die Winkel x und y, so wie auch p und q, welche einander gegenüber stehen und deren Schenkel AE und EB, DE und EC gerade Linien ausmachen, **Scheitelwinkel**. Es läßt sich beweisen, daß die Scheitelwinkel gleich sind, oder x = y und p = q ist.

Da DEC eine gerade Linie ausmacht, so ist x + p = 2 R (§. 31.) und aus eben der Ursache p + y = 2 R; also x + p = p + y (§. 6. Arith.) und, wenn man p auf beyden Seiten subtrahirt, x = y. Auf eben die Art wird bewiesen, daß p = q ist.

## §. 35.

**Wenn die Scheitelwinkel gleich sind oder x = y und p = q ist, so müssen die Schenkel dieser**

ser Winkel AE und EB und DE und EC gerade Linien AEB und DEC ausmachen. Vermöge der Voraussetzung ist $x = y$, addirt man auf beyden Seiten $x$, so ist $2x = x + y$ und eben so, weil $p = q$, $2p = p + q$; also, wenn man addirt, $2x + 2p = x + y + p + q$. Aber $x + y + p + q = 4R = 360°$ (§. 33.); also $2x + 2p = 4R = 360°$ und, wenn man durch 2 dividirt $x + p = 2R = 180°$, folglich sind $x$ und $p$ Nebenwinkel und daher DC eine gerade Linie (§. 32). Auf eben die Art wird bewiesen, daß $x + q = 2R$ und daher auch AB eine gerade Linie ist.

## Drittes Kapitel.

### Gleichheit der Dreyecke und daraus fließende Eigenschaften derselben.

§. 36.

Wenn ein geradlinichter ebener Winkel CAB (Fig. 25) durch eine gerade Linie AB geschlossen wird, so entsteht ein **geradlinichtes ebenes Dreyeck.** Dieses ist daher eine ebene Figur, die von drey geraden Linien AB, AC und CB, welche die **Seiten** heißen, begränzt wird. Diese Seiten bilden drey Winkel, AB

und

und C. Man theilt die Dreyecke ein nach der Beschaffenheit ihrer Seiten und Winkel. Ein **gleichseitiges Dreyeck** (Fig. 26) hat drey gleiche Seiten oder AB = BC = CA. Ein **gleichschenklichtes Dreyeck** (Fig. 27) hat nur zwey gleiche Seiten DF = FE. Ein **ungleichseitiges Dreyeck** (Fig. 28.) hat lauter ungleiche Seiten. Ein **rechtwinklichtes Dreyeck** (Fig. 28) hat einen rechten Winkel; die Seite AC, welche dem rechten Winkel B gegenüber steht, heißt die **Hypotenuse** und die beyden Seiten AB und BC, welche den rechten Winkel einschließen, die **Katheten**. Ein **stumpfwinklichtes Dreyeck** (Fig. 29) hat einen stumpfen Winkel. Ein **spitzwinklichtes Dreyeck** (Fig. 25. 26. 27) ist ein solches, in welchem alle Winkel spitz sind.

Die Seite AB eines Dreyecks ACB (Fig. 25), welche unten liegt, heißt die **Grundlinie** oder **Basis** desselben. Dies ist ein relativer Begriff, weil das Dreyeck so gekehrt werden kann, daß jede Seite Grundlinie wird. Die Spitze des Dreyecks ist die Spitze des Winkels ACB, welcher der Grundlinie AB gegenüber steht. **Höhe des Dreyecks** ist die Linie CD, welche von der Spitze des Dreyecks C senkrecht auf die Grundlinie AB herabfällt. Ist das Dreyeck stumpfwinklicht und liegt der stumpfe Winkel an der Grundlinie DE (Fig. 29), so muß diese verlängert werden, bis die Perpendicular-Linie oder Höhe FG dieselbe trifft.

§. 37.

§. 37.

Wenn in zwey Dreyecken ABC und DEF (Fig. 30 und 31) zwey Seiten gleich sind, nämlich AC = DF und CB = FE und die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel ebenfalls gleich sind, nämlich C = F, so müssen die Grundlinien AB und DE, die beyden Dreyecke ABC und DEF und die den gleichen Seiten gegenüberstehenden Winkel A und D, B und E gleich seyn; nämlich AB = DE, △ ABD = △ DEF, A = D und B = E.

Man lege F auf C und DF auf CA. Weil nun C = F, so decken sich die Winkel (§. 18) und FE fällt auf CB Da ferner FD = AC, und FE = CB so decken sich auch diese Linien oder D fällt auf A und E auf B (§. 17). Zwischen zwey Puncten liegt aber nur eine einzige Linie (§. 7); also deckt die Linie DE die Linie AB oder AB = DE (§. 17). Aus dem Beweise ist ferner klar, daß die Seiten der Dreyecke und die Dreyecke selbst sich decken (§. 16.) und diese also gleich sind oder △ ABC = △ DEF (§. 19). Da es auch bewiesen ist, daß die Winkel A und D, B und E sich decken, so ist auch A = D und B = E (§. 18).

§. 38.

Aus zwey gegebenen Seiten M und N (Fig. 32 und 33) nebst dem Winkel p ein Dreyeck zu zeichnen.

1) Man

1) Man ziehe von dem Puncte C eine gerade Linie C A, welche man = M nimmt.

2) An C zeichne man einen Winkel A C B = p (§. 30.).

3) Den andern Schenkel des Winkels CB mache man = N und ziehe AB, so hat man ein Dreyeck A B C aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel.

**Anmerk.** Wollte man ein gleichseitiges Dreyeck zeichnen, so wäre M = N (§. 36); folglich läßt sich aus Einer Seite und dem Winkel an der Spitze ein gleichschenklichtes Dreyeck construiren.

## §. 39.

**Im gleichschenklichten Dreyeck** A B C (Fig. 34 und 35) **sind die Winkel an der Grundlinie** AB **gleich oder** A = B.

Aus den beyden Schenkeln und dem eingeschlossenen Winkel C des Dreyecks C A B zeichne man ein anderes Dreyeck D E F, so daß A C = D F, C B = F E und C = F ist (§. 38). Es fällt in die Augen, daß die Seiten gleich sind oder A C = C B = D F = F E. Man lege F auf C, FD auf CA und FE auf CB, so folgt aus dem §. 37 angeführten Beweise, daß die Dreyecke A B C und D E F sich decken und A = D und B = E ist. Darauf nehme man die Dreyecke von einander, wende D E F um und lege F auf C, aber

FE

FE auf AC. Weil nun noch FE = AC, CB = DF und C = F ist, so werden auch noch in diesem Fall die Dreyecke sich decken; also A = E und B = D, aber vorher ist bewiesen, daß B = E ist, also ist auch A = B (§. 6. Arith.).

§. 40.

Ein gleichseitiges Dreyeck ABC (Fig. 26) ist zugleich gleichschenklicht; denn nimmt man AB für die Grundlinie an, so ist AC = CB und A = B; ist AC die Grundlinie, so ist AB = BC (§. 36), also A = C (§. 39), folglich A = B = C d. h. **in einem gleichseitigen Dreyeck sind alle Winkel gleich.**

§. 41.

**Wenn in zwey Dreyecken ABC und DEF** (Fig. 34 und 35) **alle drey Seiten gleich sind, nämlich** AB = DE, AC = DF **und** CB = FE, **so sind die Dreyecke selbst gleich, so wie auch die Winkel, welche gleichen Seiten gegenüber stehen, nämlich** A = D, B = E **und** C = F.

Man stelle sich vor, daß das Dreyeck DEF unter ABC gelegt werde, so daß die gleichen Seiten AB = DE auf einander fallen, so sind 3 Fälle möglich:

1) Sind die Winkel B und E (Fig. 36 und 37) rechte Winkel, so ist CBF eine gerade Linie (§. 32); nun ist vermöge der Voraussetzung AC

= DF; also ist das Dreyeck ACF gleichschenklicht (§. 36) und die Winkel an der Grundlinie gleich oder C = F. Betrachtet man nun wieder die beyden Dreyecke ABC und DEF, so ist AC = DF, CB = EF und C = F, also △ ABC = △ DEF und auch die übrigen Winkel gleich oder m = n und z = u (§. 37).

2) Sind die Winkel B und C oder m und n spitze Winkel, so ziehe man die Linie CF (Fig. 38 u. 39). Im Dreyeck AFC ist AC = DF und x = y; ferner im Dreyeck BCF ist CB = EF und also p = q (§. 39). Addirt man diese Winkel, so hat man x + p = y + q; ferner ist in den Dreyecken ACB und DEF die Seite AC = DF und CB = EF (vermöge der Voraussetzung); also △ ABC = △ DEF, m = n und z = u (§. 37).

3) Sind die Winkel bey B und E stumpf (Fig. 40 und 41), so ist AC = DF und daher x + p = y + q (§. 39); Ferner BC = EF; also p = q (§. 39). Diese Winkel subtrahire man von den vorigen, so ist x = y (§. 6. Arith.). In den beyden Dreyecken ABC und DEF sind also zwey Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel gleich; also △ ABC = △ DEF, m = n und z = u (§. 37).

§. 42.

## §. 42.

**Einen gegebenen Winkel A B C (Fig. 42) in zwey gleiche Theile x = y zu theilen.**

1) Man mache C E = C D.

2) Von E aus beschreibe man mit beliebiger Oefnung des Zirkels = E G einen kleinen Bogen bey G.

3) Von E aus mache man mit demselben Radius einen zweyten Kreisbogen.

4) Von dem Durchschnittspunct dieser Bogen G ziehe man zur Spitze des Winkels eine gerade Linie C G; diese theilt denselben in zwey gleiche Theile x = y.

**Beweis.** Man ziehe E G und G D. In den Dreyecken C G E und C G D ist C E = C D, E G = G D und C G = C G; also △ C G E = △ C G D und x = y (§. 41).

## §. 43.

**In einem gegebenen Puncte C (Fig. 43) einer geraden Linie A B eine senkrechte Linie C F zu errichten.**

1) Man mache C D = C E.

2) Von D aus beschreibe man mit beliebiger Oefnung des Zirkels = D F einen Bogen bey F.

3) Mit gleicher Oefnung mache man einen Bogen aus E, welcher den ersten in F schneidet.

4) Man ziehe die Linie FC. Dies ist die Perpendikular-Linie auf AB.

Beweis. Man ziehe die Linien DF und EF. In den Dreyecken DFC und EFC ist DC = EC, DF = EF, FC = FC; also △ DFC = △ EFC und m = n (§. 41), folglich steht FC dergestalt auf AB, daß die beyden Nebenwinkel gleich sind, woraus folgt, daß FC senkrecht auf AB steht (§. 32).

Anmerk. Weil m = n = R = 90° ist, so hat man dadurch zugleich erlernt, einen rechten Winkel zu zeichnen (§. 11.)

## §. 44.

Von einem gegebenen Punete C (Fig. 44) außerhalb einer geraden Linie AB eine senkrechte Linie auf AB zu fällen.

1) Von C aus schneide man die Linie AB mit dem Radius CD in D und E.

2) Mit dem Radius DF beschreibe man aus D einen Bogen.

3) Von E aus und mit demselben Radius mache man einen zweyten Bogen, der den ersten in F schneidet.

4) Durch F und C ziehe man die Linie CF. Dies ist die Perpendikulare zu AB.

Beweis. Man ziehe CD und CE, ferner DF und EF. In den Dreyecken CDF und CEF ist CD = CE,

$= CE$, $DE = EF$, $CF = CF$, also $p = q$ (§. 41). In den Dreyecken GDC und GEC ist $DC = CE$, $CG = CG$ und $p = q$; also $m = n = R$ (§. 37) und CG perpendikular auf AB (§. 32).

## §. 45.

**Eine gegebene gerade Linie AB (Fig. 45) in zwey gleiche Theile zu theilen.**

1) Von dem einen Endpuncte der geraden Linie A beschreibe man mit beliebiger Oefnung des Zirkels $= AC$ oberhalb und unterhalb der Linie einen Bogen.

2) Dasselbe thue man in B.

3) Durch die Durchschnittspuncte C und D ziehe man die Linie CD, welche AB in zwey gleiche Theile $AE = EB$ schneidet.

**Beweis.** Man ziehe CA, CB, DA und DB. In den Dreyecken DAC und DBC ist $AC = CB$, $AD = DB$, $CD = CD$; also $x = y$ (§. 41). In den Dreyecken AEC und BEC ist $AC = CB$, $CE = CE$, $x = y$; also $AE = BE$ (§. 37).

## §. 46.

**Wenn in zwey Dreyecken ABC und DEF (Fig. 34 und 35) $AB = DE$, $A = D$ und $B = E$ ist, so ist auch $\triangle ABC = \triangle DEF$, $CA = DF$, $CB = FE$ und $C = F$.**

Man lege D auf A und DE auf AB, so fällt, weil DE = AB, E auf B (§. 17). Weil D = A, so decken sie sich und DF fällt mit AC zusammen (§. 18). Ferner ist E = B; folglich fällt EF auf BC. Man kann nun AC und DF, BC und FE in Ansehung ihrer Lage als eine einzige Linie ansehen. Da aber zwey gerade Linien sich nur in einem Puncte schneiden (§. 7), so muß der Durchschnittspunct von DF und EF mit dem Durchschnittspunct von AC und BC zusammenfallen; folglich decken sich die Dreyecke ABC und DEF, sowohl in Hinsicht ihrer Fläche als ihrer Seiten und Winkel. Daher ist △ ABC = △ DEF, AC = DF, BC = EF und C = F (§. 17, 18, 19).

## §. 47.

**Aus einer gegebenen Grundlinie P (Fig. 46 und 47) nebst zwey anliegenden Winkeln m und n ein Dreyeck zu zeichnen.**

1) Man nehme AB = P.
2) Man mache A = n und B = m (§. 30).
3) Man verlängere die Seiten CA und CB, bis sie sich in C schneiden, so hat man ein Dreyeck ABC aus der gegebenen Grundlinie und den gegebenen anliegenden Winkeln.

**Anmerk.** In einem gleichschenklichten Dreyecke sind die Winkel an der Grundlinie gleich (§. 39); ein solches läßt sich daher zeichnen, wenn die Grund-

Grundlinie und Ein anliegender Winkel gegeben sind.

§. 48.

**Wenn in einem Dreyeck ABC (Fig. 48) eine Seite AB nach D verlängert wird, so ist der äußere Winkel DBC größer als jeder der innern gegenüberstehenden ACB oder CAB.**

Man halbire CB in F (§. 45), ziehe die Linie AF, verlängere sie bis E, mache FE = AF und ziehe EB. In den Dreyecken AFC und BEF ist CF = FB, AF = FE und m = n (§. 34); also ACB = x (§. 37); aber CBD > x (§. 6. Grundſ. 1. Arith.), also CBD > ACB (§. 6. Grundſ. 6. Arith.).

Man halbire AB in G (§. 45), ziehe GH, mache GH = CG, ziehe BH und verlängere CB nach I. In den Dreyecken AGC und BHG ist AG = GB, CG = GH und p = q (§. 34); also BAC = Z (§. 37). Nun ist ABI > Z (§. 6. Grundſ. 6. Arith.) und ABI = CBD (§. 34); also CBD > Z, Z = BAC; also CBD > BAC.

§. 49.

Aus diesem Lehrsatze lassen sich folgende Schlüsse herleiten:

1) **Zwey Winkel eines Dreyecks sind zusammen kleiner als zwey rechte Winkel.** Man verlängere AB (Fig. 49) bis D, so ist A < n

und $A + m < m + n$ (§. 6. Grundſ. 5. Arith.), aber $m + n = 2R$ (§. 31), alſo $A + m < 2R$ (§. 6. Grundſ. 6. Arith.)

2) **In einem Dreyeck kann nur Ein rechter und Ein ſtumpfer Winkel ſeyn;** denn könnten in einem Dreyeck zwey rechte Winkel ſeyn, ſo wäre die Summe derſelben $= 2R$ und wären es zwey ſtumpfe Winkel, ſo wäre ihre Summe $> 2R$, welches beydes unmöglich iſt.

3) **Wenn in einem Dreyeck ein rechter oder ſtumpfer Winkel iſt, ſo ſind die beyden andern Winkel ſpitze Winkel.** In dem rechtwinklichten Dreyeck ABC (Fig. 28) iſt $A + B < 2R$, aber $B = R$, alſo $A < R$ (§. 6. Grundſ. 6. Arith.) In dem ſtumpfwinklichten Dreyeck DEF (Fig. 29) iſt $E > R$, aber $D + E < 2R$, alſo $D < R$.

4) **Von einem gegebenen Puncte C (Fig. 50) läßt ſich nur Eine Perpendikular-Linie CE auf eine gerade Linie AB herabfällen.** Angenommen, daß es zwey Perpendikular-Linien geben könnte, z. B. CE und CF, ſo würden dieſe ein Dreyeck CEF bilden, in welchem es zwey rechte Winkel gäbe, den einen bey E und den andern bey F (§. 11), welches doch unmöglich iſt (Num. 2); es iſt alſo unmöglich, daß man von einem

einem Puncte C zwey Perpendikular-Linien auf eine und dieselbe Linie herabfallen könne.

§. 50.

**Wenn in einem Dreyeck ABC (Fig. 51) die Seite CB größer ist als AC, so ist auch der Winkel CAB, welcher der größern Seite CB gegenüber liegt, größer als der Winkel ABC vor der kleinern Seite AC.**

Man mache CD = CA, so ist CAD ein gleichschenklichtes Dreyeck und y = x (§. 39); aber x > B (§. 48), also y > B (§. 6. Grundf. 6. Arith.); also um so viel mehr y + n > B oder CAB > ABC.

§. 51.

**Wenn der Winkel B (Fig. 52) größer ist als A, so steht der größere Winkel B auch der größern Seite AC und der kleinere Winkel A der kleinern Seite CB gegenüber.**

Denn will man nicht zugeben, daß AC > CB ist, so muß entweder AC = CB oder AC < CB seyn. Aus dem erstern folgt B = A (§ 39) und aus dem zweyten B < A (§. 50), welches aber der Voraussezzung, daß B > A ist, widerspricht; also kann AC weder eben so groß noch kleiner als BC seyn; also ist AC > CB.

§. 52.

Hieraus folgt:

1) Daß in einem rechtwinklichten oder ſtumpfwinklichten Dreyeck diejenige Seite, welche dem rechten oder ſtumpfen Winkel gegenüber liegt, die gröſte und die Hypotenuſe gröſer als jede Kathete iſt (§. 36).

2) Daß die ſenkrechte Linie AB (Fig. 53), von einem gegebenen Puncte A auf eine gegebene Linie CD gezogen, die kürzeſte aller möglichen Linien iſt, welche von A nach CD gezogen werden können. Man ziehe z. B. die Linien AF und AE, ſo werden ABF und ABE rechtwinklichte Dreyecke, in welchen $AB < AF$ und $AB < AE$ iſt.

## §. 53.

In jedem Dreyeck ABC (Fig. 54) ſind zwey Seiten AC und CB zuſammengenommen gröſer als die dritte AB.

Man theile den Winkel C, der AB gegenüber liegt, durch CD in zwey gleiche Theile $x = y$ (§. 42). Im Dreyeck CDB iſt $p > y$ (§. 48), aber $x = y$, alſo $p > x$ (§. 6. Grundſ. 6. Arith.); alſo auch $AC > AD$ (§. 51). In dem Dreyeck CDA iſt $q > x$ (§. 48), aber $x = y$; alſo $q > y$ und $CB > DB$ (§. 51); alſo $AC + CB > AD + DB$; aber $AD + DB = AB$, alſo $AC + CB > AB$.

§. 54.

## §. 54.

**Aus drey gegebenen geraden Linien P, Q und R (Fig. 55 und 56), von welchen aber zwey größer als die dritte seyn müssen, ein Dreyeck zu zeichnen.**

1) Man mache AB so groß als die gegebene Linie R, welche die Grundlinie seyn soll.

2) Mit einer Oefnung des Zirkels = P beschreibe man aus A einen Bogen.

3) Mit einer Oefnung des Zirkels = Q mache man aus B einen zweyten Bogen.

4) Von dem Durchschnittspuncte beyder Bogen C ziehe man die Linien AC und BC, so ist ABC ein Dreyeck, in welchem AB = R, AC = P und BC = Q ist (§. 13).

**Anmerk.** Um ein gleichschenklichtes Dreyeck zu zeichnen, bedarf man nur der Grundlinie = Q und einer der Seiten = P (§. 36). Wenn man nun AB = Q gemacht hat, so beschreibt man mit gleicher Oefnung des Zirkels = P aus A und B zwey Bogen, deren Durchschnittspunct C die Spitze des Dreyecks bestimmt, wo AC = CB = P ist. Zur Zeichnung eines gleichseitigen Dreyecks gebraucht man nur Eine Seite = R (§. 36). Man nimmt AB = R und macht mit dieser Zirkelöfnung aus

A und B zwey schneidende Bogen, so ist AB = BC = CA = R und das Dreyeck gleichseitig.

§. 55.

Wenn in einem Dreyeck ABC (Fig. 57) die Winkel an der Grundlinie gleich sind oder A = B, so ist das Dreyeck gleichschenklicht oder AC = CB.

Wäre CB nicht = AC, so müßte sie entweder gröſser oder kleiner seyn. Wäre CB > AC, so müßte A > B seyn (§. 51); wäre aber CB < AC, so wäre A < B, welches beydes aber der Voraussetzung widerspricht. Also kann CB weder gröſser noch kleiner als AC, sondern muß = AC seyn.

§. 56.

Wenn man in einem gleichschenklichten Dreyeck (Fig. 58.) die Grundlinie AB in zwey gleiche Theile AD = DB theilt, und von D zur Spitze C eine gerade Linie CD zieht, so theilt diese den Winkel an der Spitze ACB in zwey gleiche Theile x = y und ist senkrecht auf der Grundlinie AB.

In den Dreyecken ADC und BDC sind alle drey Seiten gleich oder AC = CB, AD = DB und CD = CD; also △ ADC = △ BDC, x = y und m = n = R (§. 41) und folglich CD senkrecht auf AB (§. 11).

§. 57.

§. 57.

**Eine Linie CD (Fig. 58), welche in einem gleichschenklichten Dreyeck ABC den Winkel an der Spitze C in zwey gleiche Theile $x = y$ theilt, theilt auch die Grundlinie AB in zwey gleiche Theile $AD = DB$ und ist auf derselben senkrecht.**

In den Dreyecken ADC und BDC sind die beyden Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich oder $AC = CB$, $DC = DC$ und $x = y$; also $\triangle ADC = \triangle BDC$, $AD = DB$, $m = n = R$ (§. 37), folglich CD senkrecht auf AB (§. 11).

§. 58.

1) **Wenn in zwey rechtwinklichten Dreyecken ABC und DEF (Fig. 59) die Hypotenuse AC und DF und ein Winkel an der Hypotenuse $C = F$ gleich sind, so sind diese rechtwinklichten Dreyecke gleich oder $\triangle ABC = \triangle DEF$, $A = D$, $AB = DE$ und $BC = FE$.**

Man lege F auf C und FD auf CA, so wird, weil vermöge der Bedingung $FD = AC$ ist, D auf A fallen (§. 17). Aber vermöge der Voraussetzung ist $F = C$, also müssen sich diese beyden Winkel decken und FE fällt auf CB (§. 18). Von den zusammengefallenen Puncten A und D läßt sich nur eine einzige senkrechte Linie auf die zusammengefallenen Linien FE und CB ziehen (§. 49. Num. 4); also müssen die senkrechten

ten Linien DE und AB sich decken und weil zwey gerade Linien sich nur in Einem Puncte schneiden (§. 7. Num. 2), so müssen die Puncte E und B auf einander fallen; also △ ABC = △ DEF, A = D, AB = DE, BC = EF.

**Anmerk.** Hieraus folgt, daß wenn in einem gleichschenklichten Dreyeck ABC (Fig. 58.) die Linie CD auf der Grundlinie AB senkrecht steht, sie die Grundlinie AB, das ganze Dreyeck und den Winkel an der Spitze in zwey gleiche Theile theilt oder AD = DB, △ ADC = △ BDC und x = y. Denn in △ ADC und △ BDC ist AC = CB (§. 36), D = D = R (§. 11.) und A = B (§. 39); also △ ADC = △ BDC, AD = DB und x = y (§. 58).

2) **Wenn in zwey rechtwinklichten Dreyecken ABC und DEF (Fig. 60.) die Hypotenuse AC = FE und eine Kathete CB = FD gleich sind, so sind die rechtwinklichten Dreyecke gleich; △ ABC = △ DEF.**

Man lege die beyden Dreyecke so an einander, daß F und C und FD und CB zusammen fallen, so wird das Dreyeck DEF in die durch punctirte Linien angedeutete Lage DEF kommen. Da nun CB = DF, so fällt D auf B (§. 17). Nun ist vermöge der Bedingung B = D = R und folglich muß ABE eine gerade

Linie

Linie ausmachen (§. 32.) und AEC ein Dreyeck seyn (§. 36). Weil AC = FE (Beding.), so muß AEC ein gleichschenklichtes Dreyeck und CB eine senkrechte Linie von der Spitze auf die Grundlinie seyn und diese theilt also das ganze Dreyeck ACE in zwey gleiche Theile △ ABC = △ DEF. (Num. 1. Anmerk.)

## Viertes Kapitel.

### Theorie der Parallellinien und daraus fließende Eigenschaften der Dreyecke.

§. 59.

Wenn man auf einer gegebenen geraden Linie AB (Fig. 61.) zwey senkrechte Linien AC und BD errichtet, die in Einer Fläche liegen, so heißen diese **Parallellinien**. Diese Linien haben die Eigenschaft, daß bey B und A rechte Winkel sind oder x = y = p = q = R = 90° ist (§. 11. 24). Ziehet man von A und B zwey Linien AK und BL, welche spitze Winkel mit AB machen, so nennt man diese **zusammenlaufende** oder **convergirende Linien**. Zwey Linien AG und BH, welche mit AB stumpfe Winkel machen, werden **auseinanderlaufende** oder **divergirende Linien** genannt.

§. 60.

Werden zwey Parallellinien AB und CD (Fig. 62.) von einer dritten Linie HK durchschnitten,

ten, so sind: 1) die Wechselwinkel gleich $x = y$; 2) der äußere Winkel dem innern entgegengesetzten Winkel gleich $m = y$; 3) die beyden innern Winkel zusammengenommen zwey rechten Winkeln gleich oder $z + y = 2R$.

1) Man theile HK in G in zwey gleiche Theile (§. 45), ziehe aus G die senkrechte Linie GE auf AB (§. 44.) und verlängere sie nach F. Weil nun die Linien AB und CD parallel sind, so ist die Linie EF, weil sie senkrecht auf der einen Parallellinie AB ist, es auch auf der andern CD (§. 59). In den rechtwinklichten Dreyecken EGH und FGK ist $GH = GK$, $F = E = R$ und $p = q$ (§. 34); also $\triangle EGH = \triangle FGK$ und $x = y$ (§. 58).

2) Da $x = y$, aber $x = m$ (§. 34), so ist auch $m = y$.

3) Zu $x = y$ addire man z, so ist $x + z = y + z$ (§. 6. Grundsf. 4. Arith.), aber $x + z = 2R$ (§. 31); also auch $y + z = 2R$.

## §. 61.

**Parallellinien AB und CD (Fig. 63.) stehen allenthalben gleich weit von einander entfernt und können nie zusammen laufen, man mag sie so weit verlängern als man will.**

Man

Man ziehe, wo man will, eine schneidende Linie HG, von H die senkrechte Linie HK auf AB (§. 44), mache HI = KG und ziehe GI. In den △△ HIG und HKG ist KG = IH, GH = GH und p = q (§. 60); also HK = GI und K = I (§ 37); aber K = R, also auch I = R und GI senkrecht auf CD. Da also nun bewiesen ist, daß die senkrechte Entfernung der Parallele AB von CD allenthalben, wo man sie annehmen will, gleich ist, so können die Parallellinien AB und CD sich niemals nähern, und noch weniger zusammen laufen und sich schneiden.

## §. 62.

**Wenn zwey gerade Linien AB und CD (Fig. 62), welche in Einer Fläche liegen, von einer dritten Linie HK dergestalt durchschnitten werden, daß 1) entweder die Wechselwinkel gleich sind, x = y, oder 2) der äußere Winkel dem innern gleich ist, m = y, oder 3) die beyden innern Winkel zwey rechten gleich sind, z + y = 2 R, so ist in jedem dieser Fälle AB mit CD parallel.**

Man theile HK in G in zwey gleiche Theile, ziehe von G eine senkrechte Linie GF auf CD und verlängere sie nach der andern Seite nach E.

1) In den Dreyecken EGH und FGK sind die Wechselwinkel gleich oder x = y, GH = GK und p = q (§. 34); also F = E (§. 46). F

ist aber vermöge der Construction = R, also auch E = R; folglich sind AB und CD senkrecht auf EF (§. 11) und folglich parallel (§. 59).

2) Vermöge der Voraussetzung ist m = y, aber auch m = x (§. 34), also x = y und AB mit CD parallel. (Num. 1.).

3) z + y = 2 R (vermöge der Bedingung), aber z + x = 2 R (§. 31), also z + y = z + x und y = x, folglich AB mit CD parallel. (Num. 1.).

**Anmerk.** Die Theorie der Parallellinien hat ihre Schwierigkeiten, nicht als ob auch nur der geringste Zweifel gegen die §. 60 und 62 angeführten Eigenschaften derselben obwaltete, sondern diese Schwierigkeit liegt in der Art und Weise, wie die Beweise geführt werden. **Euklides** erklärt die Parallellinien als solche, welche in Einer Fläche liegen und sich nie schneiden, man möge sie auch verlängern so weit man wolle. Die Eigenschaften der Parallellinien beweiset er im ersten Buche im 27, 28, 29sten Lehrsatze. Der Lehrsatz 29 gründet sich auf den eilften Grundsatz des ersten Buchs, in welchem es heißt, daß, wenn zwey gerade Linien von einer dritten so geschnitten würden, daß die Summe der beyden innern Winkel kleiner als zwey rechte Winkel sey, diese Linien zusammen liefen und nicht

parallel

parallel wären. Dieſer Satz iſt aber kein Axiom oder Grundſatz, ſondern vielmehr ein Lehrſatz und bedarf eines Beweiſes. Dies haben ſchon die älteſten Geometer z. B. Geminus und Proclus angemerkt und Clavius führt des letztern Beweis nebſt dem ſeinigen an (C. Clavii opera math. Tom. I. Comment. in Euclidem p. 25 et pag. 49 — 53). Der arabiſche Mathematiker Nasſiridin Al Thuſſi hat ebenfalls einen ſcharfen Beweis dieſes Grundſatzes gegeben (Euclidis Elementorum libri tredecim ex traditione Nasiridini Tuſſini Romae 1594). Auch Robert Simſon hat in ſeiner vortrefflichen Ausgabe des Euklides einen Beweis des erwähnten Grundſatzes geliefert (The Elements of Euclides by R. Simſon. Edinb. 1775. Notes p. 301 — 307). Nachrichten von anderer Bemühungen, die Theorie der Parallellinien zu beweiſen kann man beym Klügel (Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonſtrandi recenſio Gottingae 1763) und beym Käſtner (Anfangsgründe der Arithmetik und Geometrie Göttingen 1786 p. 195) nachleſen. Die neueſten Verſuche die Theorie der Parallellinien zu beweiſen, ſind von Karſten, Lorenz, Schulz und Hindenburg gemacht worden. Dieſe ſind in Karſtens mathematiſchen Abhandlungen, Halle 1786 p. 115—202 geprüft und beurtheilt

urtheilt worden. Die Karſtenſche Theorie iſt unſtreitig die beſte. Er behält die Definition des Euklides bey und fängt mit der Theorie der Lage der Linien an. Wenn die Lage einer Linie z. B. AB (Fig. 62) gegeben iſt, ſo hat man einen beſtimmten Begriff von der Lage einer andern Linie HK, wenn man den Winkel x kennt, unter welchem ſie erſtere ſchneidet. Die Linien AB und CD haben eine gleiche Lage, wenn $x = y$ iſt, wenn ſie aber nicht gleiche Lage haben, d. h. iſt $x >$ oder $< y$, ſo müſſen ſie ſich ſchneiden. Parallellinien haben gleiche Lage, woraus folgt, daß $x = y$ iſt u. ſ. w. (Karſtens Anfangsgründe der math. Wiſſenſchaften, 1. Band pag. 383 und deſſen Auszug Geometr. §. 51 — 54 und §. 92 — 99). Darf ich einen beſcheidenen Zweifel gegen die ſcharfſinnige Theorie dieſes vortrefflichen Mathematikers vorbringen, ſo will es mir vorkommen, als wenn dieſelbe gänzlich auf die Definition ſolcher Linien beruhe, welche gleiche Lage haben, und daß dabey indirecte das vorausgeſetzt werde, was bewieſen werden ſoll, nämlich daß wenn zwey gerade Linien dergeſtalt von einer dritten durchſchnitten werden, daß die Wechſelwinkel gleich ſind, die Linien parallel ſeyn müſſen. Die von mir gegebene Theorie beruht auf die Erklärung zweyer innern Winkel, welche beyde rechte Winkel ſind, wenn der eine es iſt; aber aus dieſem einzelnen

Fall

Fall wird bewiesen, daß es sich in allen Fällen so verhalte und warum sollte man dies nicht eben so gut frey gestehen, als durch andere Erklärungen und Grundsätze verbergen wollen?

§. 63.

Wenn zwey gerade Linien AB und CD (Fig. 64) gleich und parallel sind und die äußersten Puncte derselben durch gerade Linien CA und DB verbunden werden, so sind auch diese gleich und parallel.

Man ziehe AD, so ist in den Dreyecken ACD und ABD die Linie AB = CD, AD = AD und x = y (§. 60); also AC = BD und m = n (§. 37); folglich werden die Linien CA und DB dergestalt von einer dritten AD geschnitten, daß die Wechselwinkel gleich sind, weßhalb CA und DB parallel sind.

Wenn zwey gerade Linien AB und CD (Fig. 63) allenthalben gleiche senkrechte Entfernung von einander haben, nämlich HK = IG, so sind sie parallel.

Vermöge der Bedingung sind HK und IG senkrecht auf CD, also ist HK parallel mit IG (§. 59). Nun ist HK = IG, also müssen auch die Linien, welche diese gleich großen Parallellinien verbinden, unter sich parallel seyn oder KG ist parallel mit HI.

Anmerk. Hieraus folgt, daß wenn Linien nirgends zusammen laufen oder sich nicht schneiden, so müssen sie parallel seyn.

§. 64.

**Wenn zwey Linien AB und EF (Fig. 65) einer dritten CD parallel sind, so sind sie unter sich parallel.**

Man ziehe GH, welche alle drey Linien durchschneidet, so ist, weil AB mit CD parallel ist, $x = y$ (§. 60.) und weil EF ebenfalls mit CD parallel ist, $y = z$ (§. 60); also $x = z$ und AB und EF werden dergestalt von einer dritten GH geschnitten, daß die Wechselwinkel gleich sind, weshalb die Linien AB und EF parallel sind.

§. 65.

**Durch einen gegebenen Punct A (Fig. 66.) eine Linie EA mit einer andern gegebenen Linie CD parallel zu ziehen.**

Erste Methode. Von dem gegebenen Puncte A ziehe man eine senkrechte Linie AM auf CD (§. 44.) und errichte in A die Perpendikular-Linie AE (§. 43), so sind AE und DC parallel (§. 59).

Zweyte Methode. Man ziehe die Linie AB (Fig. 67), welche CD schneidet und mit ihr den Winkel x macht und mache an A den Winkel $y = x$ (§. 50), so ist AE mit DC parallel (§. 62).

An-

Anmerk. Außer diesen geometrischen Methoden gibt es noch verschiedene mechanische, Parallellinien zu ziehen. 1) Man öfne den Zirkel in dem kürzesten Wege von A bis CD (Fig. 68), lege das Lineal an CD und führe die eine Zirkelspitze an der Linie CD oder der Schärfe des Lineals hin, so wird die andere Zirkelspitze A die Parallellinie AE zeichnen. 2) Man lege ein rechtwinklichtes Dreyeck von Holz, Elfenbein oder Messing NBH (Fig. 69.) genau an die Linie CD. An die Seite NH bringe man das Lineal FG und schiebe das Dreyeck NBH dichte an demselben hinauf, bis die Seite NB in A kommt. Zieht man nun an NB die Linie AE, so ist diese mit CD parall, weil die Winkel x und y sich gedeckt haben, also x = y ist (§. 18). Also sind AE und CD parallel (§. 62). Um Parallellinien zu ziehen, bedient man sich nach des gewöhnlichen Parallellineals oder zweyer Lineale, welche durch zwey um Stifte bewegliche gleich große Querstangen verbunden sind und daher nur auf gleiche Entfernung von einander geöfnet werden können. (Man sehe Leupoldii Theatr. arithm. geometr. §. 308.) Dollond hat eine andere Art Parallellineal erfunden, in dessen Mittellinie, aber doch an den äußersten Enden, ein Paar um ihre Axen bewegliche Rollen angebracht sind, welche, weil ihre Pe-

ripherien gleich sind, gleich große Wege beschreiben. Das Lineal muß also, wenn es von einer gegebenen Linie zu einem gegebenen Puncte geschoben wird, sich parallel bewegen und die neue Lage der Schärfe des Lineals mit der ersten oder der gegebenen Linie parallel seyn.

§. 66.

Wenn in einem Dreyeck ABC (Fig. 70.) die eine Seite AB nach D verlängert wird, so ist der äußere Winkel DBC so groß als die beyden innern gegenüberstehenden A + C und alle drey Winkel zusammen so groß als zwey rechte Winkel oder A + B + C = 2 R.

Durch B ziehe man BE mit AC parallel (§. 65), so werden die Parallellinien AC und BE von CB so geschnitten, daß die Wechselwinkel x und C gleich sind (§. 60). Dieselben Parallellinien werden aber auch von AD geschnitten, wodurch der innere Winkel dem äußern entgegengesetzten gleich wird oder A = z (§. 60); also x + z = CBD = C + A, addirt man hiezu noch auf beyden Seiten y, so ist A + C + y = y + x + z = 2 R (§. 31).

§. 67.

Aus diesem Satze lassen sich viele wichtige Folgen herleiten:

1) Wenn in einem Dreyeck ABC (Fig. 72.) zwey Winkel A und B gegeben sind, so findet

det man den dritten C, wenn man die Summe der beyden gegebenen Winkel von zwey rechten Winkeln subtrahirt. Z. B.

$$A = 68^\circ\ 50'\ 36''$$
$$B = 40^\circ\ 21'\ 42''$$
$$A + B = 109^\circ\ 12'\ 18''$$
$$A + B + C = 179^\circ\ 59'\ 60'' = 180^\circ$$
$$C = 70^\circ\ 47'\ 42''$$

Hieraus folgt noch, daß wenn zwey Winkel in zwey Dreyecken gleich sind, auch der dritte dem dritten gleich ist.

2) In einem bey B (Fig. 71.) rechtwinklichten Dreyeck ABC sind die beyden spitzen Winkel $A + C = R$; denn $A + B + C = 2R$ und, weil $B = R$, $A + C = R$.

3) In einem gleichschenklichten rechtwinklichten Dreyeck ABC (Fig. 71.) ist jeder der spitzen Winkeln A oder $C = 45^\circ$; denn, weil $AB = BC$, so ist $A = C$ (§. 39), hiezu addire man auf beyden Seiten A, so ist $2A = A + C = R = 90^\circ$ und, wenn man durch 2 dividirt, $A = C = \frac{R}{2} = 45^\circ$.

4) In jedem gleichschenklichten aber nicht rechtwinklichten Dreyeck DEF (Fig. 73.) kann man aus Einem gegebenen Winkel alle

übrige finden. Wenn der Winkel an der Grundlinie D gegeben ist, so hat man $D + E + F = 2D + F = 2R$ und wenn man $2D$ auf beyden Seiten subtrahirt, $F = 2R - 2D$. Ist der Winkel an der Spitze F gegeben, so muß man von $2D + F = 2R$ auf beyden Seiten F subtrahiren, wodurch man $2D = 2R - F$ erhält, und nimmt man davon die Hälfte, so bekommt man den Winkel an der Grundlinie $D = \frac{2R - F}{2} = R - \frac{1}{2}F$ (§ 6. Grundf. 4. Arith.)

5) In jedem gleichseitigen Dreyeck ABC (Fig. 26.) ist $A = B = C = \frac{2}{3}R = 60°$. $A = B$ und $A = C$ (§. 40.) und $A = A$, folglich $A + A + A = 3A = A + B + C = 2R$ und, durch die Division mit 3, ist $A = B = C = \frac{2}{3}R = \frac{180°}{3} = 60°$.

6) Umgekehrt, wenn jeder Winkel in einem Dreyeck $= 60°$ ist, so ist das Dreyeck gleichseitig (§. 55).

## §. 68.

Wenn in zwey Dreyecken ABC und DEF (Fig. 72 und 73.) zwey Winkel $A = D$ und $B = E$ und Eine Seite, welche einem der gegebenen Winkel gegenüber liegt, gleich sind oder $AC = DF$, so sind die Dreyecke gleich groß oder $\triangle ABC = \triangle DEF$, $C = F$, $AB = DE$ und $BC = EF$.

Weil

Weil $A = D$ und $B = E$, so ist $A + B = D + E$ (§. 6. Grundſ. 4. Arith.); aber $A + B + C = 2R = D + E + F$ (§. 66), alſo, wenn man $A + B = D + E$ ſubtrahirt, $C = F$. In den Dreyecken ABC und DEF iſt nun eine Seite $AC = DF$ und die anliegenden Winkel $A = D$ und $C = F$ gegeben, alſo $\triangle ABC = \triangle DEF$, $AB = DE$ und $CB = FE$ (§. 46).

**Anmerk.** Die gegebenen Stücke, welche ein Dreyeck beſtimmen und aus welchen ſich ein Dreyeck zeichnen läßt, ſind: 1) zwey Seiten nebſt dem eingeſchloſſenen Winkel (§. 37); 2) alle drey Seiten (§. 41); 3) eine Seite nebſt den anliegenden Winkeln (§. 46); 4) zwey Winkel und eine gegenüberliegende Seite (§. 68). Aber ein Winkel A (Fig. 74), eine Seite AC am Winkel A und eine Seite $CB < AC$ dem Winkel A gegenüber, geben kein beſtimmtes Dreyeck, ſondern zwey Dreyecke ABC und AEC, welche die gegebenen Stücke enthalten. Wenn man aus der Spitze C mit dem Radius CB einen Bogen macht, ſo wird derſelbe die unbeſtimmte Seite AB in zwey Puncten B und E ſchneiden und die Dreyecke AEC und ABC enthalten die genannten Stücke, ohne gleich zu ſeyn, nämlich: $A = A$, $AC = AC$ und $CE = CB$. Doch muß man hievon den Fall ausnehmen, der bey rechtwinklich-

lichten Dreyecken erwiesen ist (§. 58. Num. 2) Denn da weiß man, daß der eine Winkel ein rechter und die andern spitze Winkel sind und dann gibt es nur Einen Durchschnittspunct.

## Fünftes Kapitel.

### Eigenschaften der Parallelogramme und Ausrechnung dreyseitiger und vierseitiger Figuren.

§. 69.

Ein Quadrat ist eine ebene vierseitige Figur ABCD (Fig. 75), die lauter rechte Winkel A = B = C = D = R = 90° und gleiche Seiten AB = BC = CD = DA hat. Ein Rechteck oder Rectangel EFGH (Fig. 76.) ist eine ebene vierseitige Figur mit vier rechten Winkeln E = F = G = H = R, deren gegenüberstehende Seiten aber nur gleich sind. Ein Rhombus oder eine Raute ist eine ebene vierseitige Figur IKLM (Fig. 77.) von gleichen Seiten IK = KL = LM = MI und schiefen Winkeln. Ein Rhomboid oder eine länglichte Raute NOPQ (Fig. 78.) ist eine ebene vierseitige Figur mit vier schiefen Winkeln, deren gegenüberliegende Seiten gleich groß sind, NO = QP und OP = NQ. Ein Trapezium RSTU (Fig. 79.) ist eine ebene vierseitige Figur mit schiefen Win-

keln

keln und ungleichen Seiten. **Eine Diagonallinie** ist eine Linie US (Fig. 79), welche in einer vierseitigen Figur aus dem einen Winkel U in den entgegengesetzten S gezogen ist. **Ein Parallelogramm** heißt jede vierseitige Figur NOPQ (Fig. 78.) mit parallelen Seiten. Parallelogramme bezeichnet man nur mit zwey Buchstaben an den gegenüberliegenden Winkeln; so nennt man das Parallelogramm NOPQ schlechthin PN oder QO.

§. 70.

**In jeder geradlinichten vierseitigen Figur RSTU (Fig. 79.) beträgt die Summe der Winkel vier rechte Winkel oder** $R + S + T + U = 4R$.

Man ziehe die Diagonallinie US, so ist im Dreyeck RSU $R + q + n = 2R$ (§. 66); gleichfalls ist im Dreyeck STU die Summe der Winkeln $p + m + T = 2R$; also $R + q + n + p + m + T = 4R$, aber $q + p = S$ und $n + m = U$, also $R + T + S + U = 4R$ (§. 4. Grundſ. 6. Arith.).

§. 71.

**Wenn die Seiten zweyer Quadrate AB und EF (Fig. 75 und 80.) gleich sind, so sind die Quadrate selbst gleich oder** $AC = EG$.

Man lege das Quadrat AC auf das Quadrat EG, A auf E, und AD auf EH, so muß, weil $AD = EH$,

D auf H fallen (§. 17). Weil ferner A = E = R (§. 69.) und AB = EF ist, so fällt B auf F (§. 17. 18); es ist aber auch F = B = R und BC = FG, also fällt C auf G. Die Seiten und Winkel des einen Quadrats fallen also genau auf die Seiten und Winkel des andern; beyde Quadrate decken sich also (§. 16.) und sind gleich oder AC = EG (§. 19).

§. 72.

**Wenn zwey Quadrate gleich sind AC = EG (Fig. 75 und 80), so sind auch ihre Seiten gleich, AB = EF.**

Weil bey A und E rechte Winkel sind, so muß man diese dergestalt auf einander legen können, daß AD auf EH und AB auf EF fällt. Fiele nun nicht D auf H und B auf F, und deckte AC nicht EG, so müßte AC entweder außerhalb in dgb fallen und größer seyn oder innerhalb in $\delta\gamma\beta$ und also kleiner als EG seyn. Da beydes aber gegen die Voraussetzung ist, so decken sich AC und EG und folglich sind auch ihre Seiten gleich.

Anmerk. Man begreift leicht, daß sich auf eben die Art die Gleichheit zweyer Rechtecke beweisen läßt, welche zwey gleiche Seiten haben, die den rechten Winkel einschließen.

§. 73.

**Quadrate, Rechtecke, Rhomben und Rhomboiden sind Parallelogramme.**

Im

Im Quadrate ABCD (Fig. 75) ist $A = R$ und $B = R$ (§. 69), also $A + B = 2R$; folglich AD parallel mit BC (§. 62); gleichfalls ist $A + D = 2R$ und DC mit AB parallel; folglich ABCD ein Parallelogramm (§. 6). Auf eben die Art wird bewiesen, daß das Rechteck ein Parallelogramm ist. Im Rhombus (Fig. 81.) ziehe man die Diagonallinie AC, so ist in den Dreyecken ADC und ABC $AD = BC$, $AB = DC$ (§. 69.) und $AC = AC$, also $x = y$ (§. 41.) und folglich AB mit DC parallel (§. 62). Aus der Gleichheit der Dreyecke folgt auch, daß $p = q$, also ist AD mit BC parallel und der Rhombus ABCD ein Parallelogramm. Auf eben die Art läßt sich das von dem Rhomboid erweisen.

## §. 74.

**Wenn eine vierseitige Figur ABCD (Fig. 81) ein Parallelogramm ist und man die Diagonallinie AC ziehet, so theilt diese dasselbe in zwey gleiche Dreyecke ADC und ABC und die entgegengesetzten Seiten und Winkel desselben sind gleich: $AD = BC$, $AB = DC$, $B = D$ und $A = C$.**

Da AB mit CD parallel ist, so ist $x = y$ (§. 60), ferner ist AD mit BC parallel und $p = q$ und überdieß $AC = AC$ also $\triangle ACD = \triangle ACB$, $AD = BC$, $AB = DC$ und $D = B$ (§. 46). Addirt man $x = y$ und $p = q$, so hat man $x + q = p + y$ oder $A = C$.

An-

Anmerk. Wenn zwey Parallelogramme gleiche Seiten haben, so müssen ihre Flächen auch gleich seyn, weil sie sich durch Diagonale in gleich große Dreyecke zerlegen lassen.

§. 75.

**Auf einer gegebenen Linie ein Quadrat zu zeichnen.** Die Linie sey AB (Fig. 75.)

1) Man errichte auf AB die senkrechte Linie AD = AB (§. 43).

2) Aus D beschreibe man mit einer Zirkelöfnung = AD einen Bogen.

3) Aus B mache man mit gleicher Oefnung einen zweyten Bogen, der den ersten schneidet.

4) Man ziehe DC und CB, so muß AB CD ein Quadrat seyn.

**Beweis.** Daß alle Seiten AB = BC = CD = DA sind, folgt aus der Construction. Daß aber auch alle Winkel rechte Winkel sind, läßt sich so erweisen. Man ziehe die Diagonale DB, so ist in den Dreyecken BAD und BCD die Seite AB = DC, AD = BC und DB = DB, also x = y und m = n (§. 41); folglich DC mit AB parallel (§. 62); also A + D = 2 R, A = R (vermöge der Construction), also auch D = R. Da nun m = n, so ist AD parallel mit BC (§. 62), also A + B = 2 R und D + C = 2 R; also, weil A = R und D = R, B = R und C = R. Die Figur ABCD hat also gleiche Seiten und rechte Winkel und ist folglich ein Quadrat. (§. 69).

§. 76.

## §. 76.

**Aus zwey gegebenen Seiten M und N (Fig. 82 und 83), welche den rechten Winkel einschließen sollen, ein Rechteck zu zeichnen.**

1) Man mache AB = N und ziehe die senkrechte Linie AD = M (§. 43).

2) Aus D beschreibe man mit DC = AB = N einen Bogen.

3) Aus B mache man mit BC = AD = M einen zweyten Bogen, der den ersten in C schneidet.

4) Man ziehe DC und CB, so ist ABCD das verlangte Rechteck.

**Beweis.** Daß die gegenüberliegenden Seiten AD = BC, AB = DC gleich sind, erhellet aus der Construction; die Gleichheit der Winkel aber A = B = C = D = R wird auf dieselbe Weise wie bey dem Quadrat erwiesen (§. 75).

## §. 77.

**Aus einer gegebenen Linie P (Fig. 84 und 77) und einem Winkel Q einen Rhombus zu zeichnen.**

1) Man mache IK = P.

2) Man mache I = Q und IM = P.

3) Mit IM = IK = P beschreibe man aus M und K zwey Bogen, die sich in L schneiden.

4) Man ziehe ML und KL, so ist IKLM ein Rhombus.

**Beweis.** Daß diese Figur schiefe Winkel und gleiche Seiten IK = KL = LM = MI = P habe, ist aus der Construction klar.

§. 78

**Aus einem gegebenen schiefen Winkel Z (Fig. 85 und 78) und zwey Seiten V und Y, welche denselben einschließen, ein Rhomboid zu zeichnen.**

1) An NO = Y setze man den Winkel N = Z (§. 30).

2) Man mache NQ = V und mache aus Q mit PQ = NO = Y einen Bogen.

3) Aus O mit PO = NQ = V mache man einen zweyten Bogen, der den ersten in P schneidet.

4) Man ziehe PQ und PO, so ist NQPO ein Rhomboid.

**Beweis.** Da Z ein schiefer Winkel ist, so muß es auch N seyn. Ferner sind vermöge der Construction die entgegengesetzten Seiten NO = QP, NQ = OP gleich; also ist die Figur ein Rhomboid (§. 69).

§. 79.

In einem Parallelogramm ABCD (Fig. 86) ziehe man die Diagonale AC und durch einen in derselben angenommenen Punct I die Linie EF parallel

mit

mit AB und DC und GH parallel mit AD und BC. Das Parallelogramm DB wird dadurch in vier kleinere Parallelogramme (§. 69) zertheilt. Die zwey HE und FG, deren Diagonale zusammen die große Diagonale AC ausmachen, heißen die **Parallelogramme um die Diagonale.** Die beyden andern BI und ID, welche nebst den eben genannten HE und und FG das große Parallelogramm DB ausmachen, nennt man **die Complemente der Parallelogramme um die Diagonale.** Es läßt sich beweisen, **daß in jedem Parallelogramme** DB **die Complemente** BI **und** ID **der Parallelogramme um die Diagonale gleich sind.** Die Diagonale AC theilt das Parallelogramm DB in zwey gleiche Theile (§. 74.); also △ ACD = △ ABC. Hievon subtrahire man △ ICG = △ ICF (§. 74.), so ist IGDA = IFBA (§. 6. Grundſ. 4. Arith.); man subtrahire ferner △ AIE = △ AIH (§. 64.), so ist BI = LD.

## §. 80.

**Zwey Parallelogramme** BD **und** BF (Fig. 87), **welche auf einer und derselben Grundlinie** AB **und zwischen Parallellinien** DE **und** AB **stehen, sind gleich oder gleichen Flächeninhalts.** AB = CD (§. 74) und BA = EF (§. 74), also CD = EF (§. 6. Grundſ. 3. Arith.), dazu addire man CF = CF so ist CD + CF = EF + CF oder DF = CE. Ferner

ist AD = BC und AF = BE (§. 74); also △ ADF = △ BCE (§. 41), davon subtrahire man GCF = GCF, so ist ADCG = GBEF (§. 6. Grundſ. 4. Arith.). Ferner addire man zu ADCG = GBEF das Dreyeck ABG, so ist BD = BF.

## §. 81.

Hieraus folgt:

1) **Daß Parallelogramme BD und EG (Fig. 88) welche auf gleichen Grundlinien AB = EF und zwiſchen Parallellinien AF und DG ſtehen, gleich ſind.** Man ziehe AH und BG, welche gleich und parallel ſind, weil ſie gleiche und parallele Linien HG und AB verbinden (§. 63); alſo iſt ABGH ein Parallelogramm, AC = AG (§. 80) und AG = GE oder BD = EG.

2) **Unter der Höhe eines Parallelogramms verſteht man eine ſenkrechte Linie EH von einer Seite EF auf die entgegengeſetzte Seite AB, welche letztere zuweilen verlängert werden muß. In rechtwinklichten Parallelogrammen iſt die ſenkrechte Seite ſelbſt die Höhe. Wenn Parallelogramme gleiche Grundlinie AB = EF (Fig. 88) und gleiche Höhe haben, ſo ſind ſie gleich oder AC = EG.** Man ſtelle ſich vor, daß die Grundlinien in der geraden Linie ABEF

liegen

liegen und da nun auch die Höhen gleich sind, so muß DCHG eine gerade Linie ausmachen, die mit ABEF parallel läuft (§. 63); also AC = EG.

§. 82.

Ein gegebenes Parallelogramm ABCD (Fig. 87) in ein anderes gleiches, welches einen gegebenen Winkel BAF hat, zu verwandeln. Man setze an AB den gegebenen Winkel BAF (§. 30), ziehe durch B die Linie BE mit AF parallel (§. 65) und verlängere DC nach E, so ist ABEF ein Parallelogramm, welches den gegebenen Winkel hat und = BD ist (§. 80).

§. 83.

Es ist ein Parallelogramm ABCD (Fig. 89) gegeben; man soll dasselbe in ein anderes gleiches Parallelogramm verwandeln, welches einen gegebenen Winkel E und eine gegebene Seite F hat.

1) Man verwandele das Parallelogramm ABCD in ein anderes gleiches GHIK, welches den gegebenen Winkel E = KGH hat, und dessen Höhe der Höhe des Parallelogramms AC gleich ist (§. 82).

2) Man verlängere GH und mache HL = F, ziehe MN parallel mit IH und verlängere IK bis M.

3) Man ziehe MH und verlängere dieselbe, bis sie die verlängerte KG in P schneidet.

4) Durch P ziehe man PN mit GL parallel und verlängere IH bis Q, so ist QNLH das verlangte Parallelogramm.

**Beweis.** Die Complemente um die Diagonale sind gleich groß (§. 79.), also HK = HN, aber HK = AC, also HN = AC und da überdies m = n = p = E = und HL = F ist, so ist HN = AC und hat einen Winkel = E und eine Seite = F.

## §. 84.

**Eine Größe messen** heißt eine gewisse Größe zur Einheit oder zum Maaße annehmen und untersuchen, wie oft dieses in der auszumessenden Größe enthalten ist. Hieraus folgt, daß die Einheit oder das Maaß von gleicher Art und Beschaffenheit seyn muß als die Größe ist, welche ausgemessen werden soll. **Zur Messung gerader Linien muß man als Einheit eine gerade Linie von bestimmter Größe annehmen.**

Längen mißt man durch Fuß, Ellen (Eine Elle = 2 Fuß) und Faden (Ein Faden = 6 Fuß = 3 Ellen). Den Fuß theilt man in 12 gleiche Theile, welche man Werk- oder Duodecimalzoll nennt, den Zoll in 12 Linien und die Linie in 10 Theile, woraus folgt, daß Ein Fuß = 12 Zoll = 144 Linien =

1440

1440 Zehntheile der Linie ist. Eine Ruthe ist eine bestimmte Menge von Fußen, entweder 12 Fuß, wie die rheinländische oder 16 Fuß, wie die holsteinische. Das Duodecimalmaaß wird von allen Handwerkern und Künstlern und fast in allen bürgerlichen Verrichtungen gebraucht. Da aber die Rechnung mit Decimalbrüchen so sehr bequem ist, so theilt man bey allen geometrischen und mathematischen Berechnungen den Fuß in 10 Theile, welche man Decimalzoll nennt, den Zoll in 10 Decimallinien und die Linie abermals in 10 Theile. Nach dem Decimalmaaße ist also der Fuß = 10 Zoll = 100 Linien = 1000 Zehntheile der Linie. Die Ruthe wird zu 10 Fuß angenommen. Um 62 Ruthen 7 Fuß 4 Zoll 3 Linien 7 Zehntheile zu bezeichnen, schreibt man 62° 7′ 4″ 3‴ 7⁗. Brauche man Decimalmaaß, so ist nur nöthig 62°,7437 (§. 47. Arith.) zu schreiben und 125′,368 bedeutet 123 Fuß 3 Zoll 6 Linien und 8 Zehntheile. Will man eine Figur nach dem Maaße auf dem Papier entwerfen, so muß man nach den Umständen und je nachdem die Figur größer oder kleiner ausfallen soll, eine beliebige Linie zur Ruthe, zum Fuß oder Zoll annehmen. Dies wird dann der Maaßstab der Figur.

Wenn man die Fläche oder den Raum einer ebenen Figur oder eine Ausdehnung in die Länge und Breite (§. 2) ausmessen oder, wie man sich ausdrückt, den Inhalt derselben finden, oder sie quadriren

will, so kann man das Längenmaaß nicht mehr gebrauchen, weil an einander gelegte Linien, die keine Breite haben, nie eine Ausdehnung in die Länge und Breite geben können. Das Maaß oder die Einheit der Flächen muß also eine kleine Fläche seyn, welche, mehrere Male an einander gelegt, die gegebene Fläche ausfüllen und ausmessen wird. Zur Einheit ebener Figuren hat man das Quadrat erwählt, weil sich am leichtesten zeigen läßt, wie oft dieses in Quadraten und Rechtecken enthalten ist und man von diesen auf Figuren von anderer Bildung und mehr oder weniger Seiten schließen kann. Eine **Quadrat-Ruthe** ist ein Quadrat, dessen Seite Einer Ruthe gleich ist, ein **Quadratfuß** ist ein Quadrat, dessen Seite Einen Fuß hält. Bey dem Decimalmaaße hat eine Quadrat-Ruthe 100 Quadratfuß, ein Quadratfuß 100 Quadratzoll und ein Quadratzoll 100 Quadratlinien, woraus folgt, daß wenn z. B. 34728952 Quadratlinien gegeben sind, diese auf Quadratzoll, Quadratfuß und Quadrat-Ruthen reducirt werden können, wenn man die Abtheilung von der rechten zur linken vornimmt und zwey Zahlen in jeder Classe annimmt. Also: $34^{\circ}\,72'\,89''\,53'''$ Quadratmaaßes.

**Den Inhalt einer Figur berechnen** heißt also finden, wie viele Quadrat-Ruthen, Quadratfuß u. s. w. in der auszumessenden Figur Platz haben oder neben einander hingelegt werden können.

§. 85.

## §. 85.

## Den Inhalt eines Quadrats zu berechnen. (Fig. 90.).

Man messe eine der Seiten desselben AB und multiplicire sie mit sich selbst, so ist das Product der Inhalt der Figur.

| | | | |
|---|---|---|---|
| AB = 3′4″6‴ | | AB = 123°2′ | |
| BC = AB = 3′4″6‴ | | BC = AB = 123°2′ | |
| | 2076 | | 246 4 |
| | 1384 | | 3696 |
| | 1038 | | 2464 |
| | | | 1232 |
| ABCD = 11′97″16‴ | | ABCD = 15178°24′ | |

**Beweis.** Es sey AB = 4 Fuß und BC = 4 Fuß. Man ziehe durch jeden Punct in AB Parallellinien mit BC und durch jeden Punct in BC Parallellinien mit AB, so sieht man, daß vier Reihen kleiner Quadrate herauskommen, in deren jeder 4 Quadrate, zusammen also 16 sind.

Es sey im allgemeinen das kleine Quadrat abcd die Einheit oder das Maaß der Fläche = m, dessen Seite ab die Seite AB des Quadrats mißt, so kann man auf die Grundlinie AB so viele kleine Quadrate hinlegen als ab in AB enthalten ist; also ist m. AB die Anzahl der Quadrate, welche auf AB Platz finden

und den Raum ABFE ausfüllen. Nun enthält das ganze Quadrat ABCD so viele solcher rechtecklichten Streifen ABFE als AE = BF in AD = BC enthalten ist; also muß man m. AB AB mal zu sich selbst addiren, d. h. AB quadriren; also ABCD = m. $AB^2$. **Man findet also den Flächeninhalt eines Quadrats, wenn man die Einheit der Fläche = m mit der Quadratzahl der Einheiten der Seiten nach dem Längenmaaße multiplicirt.**

§. 86.

**Den Flächeninhalt eines Rechtecks ABCD (Fig. 91) zu finden.**

Man multiplicire die Grundlinie AB mit der Höhe BC, so ist das Product der Inhalt des Rechtecks im Quadratmaaße.

| | |
|---|---|
| AB = 342 Ellen | AE = 45°6′ |
| BC = 124 — | BC = 3°4′ |
| 1368 | 1824 |
| 684 | 1368 |
| 342 | AC = 155°04′ |

AC = 42408 □ Ellen.

**Beweis.** Es enthalte AB 5 Fuß und BC 4 Fuß und man ziehe Parallellinien mit der Höhe und Grundlinie so entstehen rechtwinklichte Streifen parallel mit der Grundlinie, deren jeder 5 Quadratfuß enthält und alle

alle zusammen das ganze Rechteck ausfüllen, welches also 4. 5 = 20 Quadratfuß enthält.

Wenn man dies im allgemeinen für das Rechteck ABCD (Fig. 92) beweisen will, dessen Seite AD ein aliquoter Theil von AB ist (welches man immer annehmen darf, weil man ja nur mit immer kleinern und feinern Theilen des Maaßstabes messen darf): so beschreibe man über AB ein Quadrat ABEF = $AB^2$, welches das Rechteck ABCD so oft enthält als AF oder AB die Linie AD oder BC enthält, d. h. $AB^2$ : AC = AB : BC (§. 73. Arith.) und $AB^2$. BC = AC. AB (§. 78. Arith.) und, wenn man auf beyden Seiten durch AB dividirt, AB. BC = AC.

§. 87.

## Den Flächeninhalt eines Rhombus oder eines Rhomboids (Fig. 93) zu berechnen.

Man errichte auf AB eine senkrechte Linie BE (§. 43), welche die gegenüberliegende Seite CD schneidet. Man multiplicire nun die Grundlinie AB mit der Höhe BE, so hat man den gesuchten Inhalt.

**Beweis.** Man verlängere DC und errichte in A die senkrechte Linie AF. Im Parallelogramm AC ist AB = DC (§. 74) und im Parallelogramm AE ist AB = EF; also DC = EF. Man subtrahire DE, so ist EC = DF; ferner BE = AF (§. 61.) und CB = EA (§. 74), also △ BCE = △ ADF (§. 37.) Man addire nun das Trapezium ABED, so ist ABCD

=

= ABEF; aber der Inhalt des rechtwinklichten Parallelogramms ABEF ist = AB. BE (§. 86.), also auch der Inhalt des schiefwinklichten Parallelogramms = AB. BE.

§. 88.

Das Dreyeck ABC (Fig. 94), welches mit dem Parallelogramm ABED auf gleicher Grundlinie AB und zwischen denselben Parallelen AB und CE steht, ist die Hälfte des Parallelogramms.

Durch B ziehe man BG mit AC parallel, so ist AG = AE (§. 81) und $\frac{1}{2}$ AG = $\frac{1}{2}$ AE (§. 6. Grundsf. 4. Arith.); aber △ ABC = $\frac{1}{2}$ AG (§ 74), also △ ABC = $\frac{1}{2}$ AE = $\frac{1}{2}$ ABED.

§. 89.

Dreyecke ABC und ABD, (Fig. 95.) welche auf einer und derselben Grundlinie AB oder auf gleichen Grundlinien und zwischen Parallelen AB und CD stehen, sind gleich.

Man ziehe BE und BF mit AC und AD parallel, so ist das Parallelogramm AE = AF (§. 81) und $\frac{1}{2}$ AE = $\frac{1}{2}$ AF; also △ ABC = △ ABD (§. 74).

§. 90.

Wenn auf gleicher Grundlinie AB (Fig. 96.) zwey gleiche Dreyecke ABC und ABD stehen, so ist

ist die Linie CD durch die Spitzen derselben mit der Grundlinie AB parallel.

Ist CD nicht mit AB parallel, so muß sich eine andere CE mit AB parallel ziehen lassen (§. 65). Man ziehe EB, so ist △ ABC = △ ABE (§. 89); aber vermöge der Voraussetzung ist △ ABC = △ ABD; also △ ABE = △ ABD, welches unmöglich ist, wenn nicht E auf D fällt; CD muß also mit AB parallel seyn.

§. 91.

**Den Flächeninhalt eines Dreyecks ABC (Fig. 97.) zu berechnen.**

1) Man fälle von der Spitze C eine senkrechte Linie CD auf die Grundlinie AB herab (§. 44).

2) Man multiplicire die Grundlinie AB mit der halben Höhe CD oder die Höhe mit der halben Grundlinie, so bekommt man den Flächeninhalt des Dreyecks ABC.

**Beweis.** Man ziehe BE parallel mit AC und CE mit AB, so ist AE = AB . CD (§. 86. 87); aber △ ABC = $\frac{1}{2}$ AE (§. 74.) = $\frac{AB \cdot CD}{2}$ = $\frac{1}{2}$ AB . CD = AB . $\frac{1}{2}$ CD.

**Anmerk.** Es ist einerley, welche Seite des Dreyecks man als die Grundlinie ansieht, weil dasselbe doch immer die Hälfte des Parallelogramms bleibt.

bleibt. Ist der Winkel bey B stumpf, wie in Fig. 98, so verlängere man die Grundlinie AB, ehe man die senkrechte Linie CD ziehet; man muß nun AB (nicht aber AD) mit $\frac{1}{2}$ CD multipliciren.

§. 92.

**Den Flächeninhalt eines Trapeziums ABCD (Fig. 99) zu berechnen.**

1) Man ziehe die Diagonale DB.

2) Ziehe AE und CF senkrecht auf DB (§. 44).

3) Addire diese senkrechten Linien, nehme die Hälfte der Summe $\frac{1}{2}$ AE + $\frac{1}{2}$ CF, multiplicire sie mit der Diagonale DB, so hat man den Flächeninhalt des Trapeziums ABCD.

AE = 124 Ellen
CF = 66

AE + CF = 190

$\frac{1}{2}$ AE + $\frac{1}{2}$ CF = 95
DB = 132

190
285
95

ABCD = 12540 □ Ellen.

**Beweis.** Trapezium ABCD = △ ABD + △ DBC (§. 6. Arith. Grundsf. 1.), aber △ ABD = $\frac{1}{2}$ AE

$\frac{1}{2}$ AE . DB und $\triangle$ DBC $= \frac{1}{2}$ CF, DB (§. 91); also ABCD $= \frac{1}{2}$ AE . DB $+ \frac{1}{2}$ CF . DB $= (\frac{1}{2}$ AE $+ \frac{1}{2}$ CF) . DB.

**Anmerk.** 1. Hat das Trapezium einen einwärts gehenden Winkel ADC (Fig. 100), so muß man die Diagonale DB verlängern, bis die Perpendiculare CF und AE dieselbe schneiden; aber die vorige Auflösung und der Beweis treffen auch hier vollkommen zu und ABCD ist $= (\frac{1}{2}$ CF $+ \frac{1}{2}$ AE) . DB.

**Anmerk.** 2. Hat das Trapezium ABCD (Fig. 101.) zwey parallele Seiten AB und DC, so ist CF = AE (§. 61). Nun ist ABCD $=$ $\triangle$ ABC $+$ $\triangle$ ADC, aber $\triangle$ ABC $= \frac{1}{2}$ AB . CF und $\triangle$ ACD $= \frac{1}{2}$ DC . AE $= \frac{1}{2}$ DC . CF; also ABCD $= \frac{1}{2}$ AB . CF $+ \frac{1}{2}$ DC . CF $= (\frac{1}{2}$ AB $+ \frac{1}{2}$ DC) . CF. Hierauf gründet sich die gewöhnliche Art, den Quadratinhalt der Aecker zu finden. Man mißt nämlich die Breite derselben an beyden Enden, addirt diese Größen, nimmt die Hälfte davon und multiplicirt diese mit der Länge des Ackers, welche man am liebsten in der Mitte desselben mißt, um den Fehlern auszuweichen, welche daraus entstehen könnten, daß AB und CD nicht vollkommen parallel wären. Z. B.

Breite

= ABEF; aber der Inhalt des rechtwinklichten Parallelogramms ABEF ist = AB. BE (§. 86.), also auch der Inhalt des schiefwinklichten Parallelogramms = AB. BE.

§. 88.

**Das Dreyeck ABC (Fig. 94), welches mit dem Parallelogramm ABED auf gleicher Grundlinie AB und zwischen denselben Parallelen AB und CE steht, ist die Hälfte des Parallelogramms.**

Durch B ziehe man BG mit AC parallel, so ist AG = AE (§. 81) und $\frac{1}{2}$ AG = $\frac{1}{2}$ AE (§. 6. Grundsf. 4. Arith.); aber △ ABC = $\frac{1}{2}$ AG (§ 74), also △ ABC = $\frac{1}{2}$ AE = $\frac{1}{2}$ ABED.

§. 89.

**Dreyecke ABC und ABD, (Fig. 95.) welche auf einer und derselben Grundlinie AB oder auf gleichen Grundlinien und zwischen Parallelen AB und CD stehen, sind gleich.**

Man ziehe BE und BF mit AC und AD parallel, so ist das Parallelogramm AE = AF (§. 81) und $\frac{1}{2}$ AE = $\frac{1}{2}$ AF; also △ ABC = △ ABD (§. 74).

§. 90.

**Wenn auf gleicher Grundlinie AB (Fig. 96.) zwey gleiche Dreyecke ABC und ABD stehen, so ist**

ist die Linie CD durch die Spitzen derselben mit der Grundlinie AB parallel.

Ist CD nicht mit AB parallel, so muß sich eine andere CE mit AB parallel ziehen lassen (§. 65). Man ziehe EB, so ist △ ABC = △ ABE (§. 89); aber vermöge der Voraussetzung ist △ ABC = △ ABD; also △ ABE = △ ABD, welches unmöglich ist, wenn nicht E auf D fällt; CD muß also mit AB parallel seyn.

## §. 91.

**Den Flächeninhalt eines Dreyecks** ABC (Fig. 97.) **zu berechnen.**

1) Man fälle von der Spitze C eine senkrechte Linie CD auf die Grundlinie AB herab (§. 44).

2) Man multiplicire die Grundlinie AB mit der halben Höhe CD oder die Höhe mit der halben Grundlinie, so bekommt man den Flächeninhalt des Dreyecks ABC.

**Beweis.** Man ziehe BE parallel mit AC und CE mit AB, so ist AE = AB . CD (§. 86. 87); aber $\triangle ABC = \frac{1}{2} AE$ (§. 74.) $= \frac{AB \cdot CD}{2} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = AB \cdot \frac{1}{2} CD$.

**Anmerk.** Es ist einerley, welche Seite des Dreyecks man als die Grundlinie ansieht, weil dasselbe doch immer die Hälfte des Parallelogramms bleibt.

bleibe. Ist der Winkel bey B stumpf, wie in Fig. 98, so verlängere man die Grundlinie AB, ehe man die senkrechte Linie CD ziehet; man muß nun AB (nicht aber AD) mit $\frac{1}{2}$ CD multipliciren.

§. 92.

Den Flächeninhalt eines Trapeziums ABCD (Fig. 99) zu berechnen.

1) Man ziehe die Diagonale DB.

2) Ziehe AE und CF senkrecht auf DB (§. 44).

3) Addire diese senkrechten Linien, nehme die Hälfte der Summe $\frac{1}{2}$ AE + $\frac{1}{2}$ CF, multiplicire sie mit der Diagonale DB, so hat man den Flächeninhalt des Trapeziums ABCD.

AE = 124 Ellen
CF = 66

AE + CF = 190

$\frac{1}{2}$ AE + $\frac{1}{2}$ CF = 95
DB = 132

190
285
95

ABCD = 12540 □ Ellen.

Beweis. Trapezium ABCD = △ ABD + △ DBC (§. 6. Arith. Grundsl. 1.), aber △ ABD = $\frac{1}{2}$ AE

$\frac{1}{2}$ AE . DB und $\triangle$ DBC $= \frac{1}{2}$ CF , DB (§. 91); also ABCD $= \frac{1}{2}$ AE , DB $+ \frac{1}{2}$ CF . DB $= (\frac{1}{2}$ AE $+ \frac{1}{2}$ CF) . DB.

**Anmerk.** 1. Hat das Trapezium einen einwärts gehenden Winkel ADC (Fig. 100), so muß man die Diagonale DB verlängern, bis die Perpendiculare CF und AE dieselbe schneiden; aber die vorige Auflösung und der Beweis treffen auch hier vollkommen zu und ABCD ist $= (\frac{1}{2}$ CF $+ \frac{1}{2}$ AE) . DB.

**Anmerk.** 2. Hat das Trapezium ABCD (Fig. 101.) zwey parallele Seiten AB und DC, so ist CF = AE (§. 61). Nun ist ABCD $=$ $\triangle$ ABC $+$ $\triangle$ ADC, aber $\triangle$ ABC $= \frac{1}{2}$ AB . CF und $\triangle$ ACD $= \frac{1}{2}$ DC . AE $= \frac{1}{2}$ DC . CF; also ABCD $= \frac{1}{2}$ AB . CF $+ \frac{1}{2}$ DC . CF $= (\frac{1}{2}$ AB $+ \frac{1}{2}$ DC) . CF. Hierauf gründet sich die gewöhnliche Art, den Quadratinhalt der Aecker zu finden. Man mißt nämlich die Breite derselben an beyden Enden, addirt diese Größen, nimmt die Hälfte davon und multiplicirt diese mit der Länge des Ackers, welche man am liebsten in der Mitte desselben mißt, um den Fehlern auszuweichen, welche daraus entstehen könnten, daß AB und CD nicht vollkommen parallel wären. Z. B.

Breite

Breite am nördl. Ende DC = 18 Ellen
Breite am südl. Ende AB = 32

2) 50

$\frac{1}{2}$ DC + $\frac{1}{2}$ AB = 25
Länge in der Mitte CF = 200 Ellen

Inhalt des Ackers ABCD = 5000 □ Ellen.

## §. 93.

**In jedem rechtwinklichten Dreyeck ABC (Fig. 102.) ist das Quadrat AE der Hypotenuse AB so groß als die beyden Quadrate der Katheten BG + AH oder $AB^2 = AC^2 + BC^2$.**

Aus C ziehe man CL senkrecht auf DE. Diese Linie theilt das Quadrat AE in zwey Parallelogramme AL und LB. Man ziehe IB und CD, so läßt sich beweisen, daß AL = AH und zwar auf folgende Weise: x = p = R (§. 69), hiezu addire man n, so ist x + n = p + n und überdies noch IA = AC und AB = AD (§. 69); also △ AIB = △ ADC (§. 38), aber △ AIB = $\frac{1}{2}$ AH (§. 88.) und △ ADC = $\frac{1}{2}$ AL (§. 88); also $\frac{1}{2}$ AH = $\frac{1}{2}$ AL und folglich AH = AL. Auf eben die Art wird bewiesen, daß LB = BG ist und folglich hat man AH + BG = AL + LB, aber AL + LB = AE, also AH + BG = AE oder $AC^2 + BC^2 = AB^2$.

§. 94.

## §. 94.

**Zwey Quadrate A und B (Fig. 103.) zu addiren.**

1) Man mache bey D einen rechten Winkel und nehme FD gleich der Seite des Quadrats B und DE gleich der Seite des Quadrats A.

2) Man ziehe FE, so ist diese Linie die Seite des gesuchten Quadrats; denn $FE^2 = FD^2 + DE^2$ (§. 93) $= A + B$ (§. 71).

## §. 95.

**Von einem Quadrate A (Fig. 103 und 104.) ein anderes Quadrat B zu subtrahiren.**

1) Man ziehe eine Linie PQ gleich der Seite des kleinern Quadrats B.

2) Man errichte in Q eine unbestimmt lange Perpendiculare QR.

3) Aus P mache man mit einer Zirkelöffnung PR, die der Seite des größern Quadrats A gleich ist, einen Kreisbogen, der QR in R schneidet, so ist QR die Seite des gesuchten Quadrats.

Beweis. $PR^2 = PQ^2 + QR^2$ und, wenn man $PQ^2$ subtrahirt, $PR^2 - PQ^2 = QR^2$; aber $PR^2 = A$ und $PQ^2 = B$ (§. 71); also $A - B = QR^2$.

## §. 96.

**Wenn in einem Dreyeck das Quadrat der einen Seite AC (Fig. 105.) so groß ist als die**

der Quadrate der beyden andern Sei-
und BC, oder wenn $AC^2 = AB^2 + EC^2$,
das Dreyeck ABC bey B rechtwinklicht.

In B errichte man BD senkrecht auf CB, mache $BD = BA$ und ziehe CD, so ist $BD^2 = AB^2$ (§. 71) und, wenn man $BC^2$ auf beyden Seiten addirt, $BD^2 + BC^2 = AB^2 + BC^2$ (§. 6. Grundſ. 4. Arith.); aber vermöge der Voraussetzung ist $AB^2 + BC^2 = AC^2$ und $BD^2 + BC^2 = DC^2$ (§. 93), also $AC^2 = DC^2$ und $AC = DC$ (§. 72.). Ferner ist $AB = BD$ und $BC = BC$; also $\triangle ABC = \triangle DBC$ und $x = y$ (§. 41); aber $y = R$ (vermöge der Construction), also auch $x = R$ und das Dreyeck ABC bey B rechtwinklicht.

§. 97.

Man sagt, jedes Rechteck EFGH (Fig. 76.) werde durch die beyden geraden Linien EH und EF, welche den rechten Winkel einschließen, bestimmt. Da sich nun der Flächeninhalt des Rechtecks durch das Product der Seiten ausdrücken läßt oder $EG = EH$. EF ist (§. 86.): so bedeutet EH. EF das Rechteck, welches durch die geraden Linien EH und EF bestimmt wird.

§. 98.

Wird eine gerade Linie AB (Fig. 86) in Hin zwey Theile getheilt, so ist das Quadrat der

ganzen

ganzen Linie AB so groß als die Quadrate auf jedem der abgeschnittenen Stücke AH und HB nebst dem doppelten Rechtecke aus diesen Stücken oder $AB^2 = AH^2 + HB^2 + 2\ AH.HB$.

Man beschreibe auf der Linie AB das Quadrat ABCD (§. 75.); ziehe die Diagonale AC, mache AE = AH, ziehe durch E mit AB parallel die Linie EF und durch I parallel mit AD die Linie GH (§. 65). Es soll nun zuerst bewiesen werden, daß $EH = AH^2$ und $GF = HB^2$. Weil DB ein Quadrat ist und rechte Winkel hat (§. 69.) so müssen die durch die Parallellinien EF und GH gebildeten Winkel auch rechte Winkel seyn, (§. 60. 74); also sind EH und GF rechtwinklichte Figuren. Weil AB = BC (§. 69), so ist z = y (§. 39.), aber weil AB mit EF parallel ist, so ist z = n (§. 60.); also n = y und FC = IE (§. 55.) = HB = IG = GC (§. 74); also $GF = HB^2$ (§. 69.). Da AH = AE (vermöge der Construction) = EI = IH (§. 74.), so ist $EH = AH^2$. Ferner muß bewiesen werden, daß DI und IB Rechtecke aus AH und HB sind. DI = DE, EI (§. 97.), aber DE = GI = IF = HB und EI = AH; also DI = AH. HB. Ferner IB = HL. HB, aber HI = AH, also IB = AH. HB. Aus der Betrachtung der Figur ersieht man, daß DB = EH + GF + DI + IB ist (§. 6. Grundsl. 1. Arith.), aber DI = IB, also DI + IB = 2 IB, also DB = EH + GF + 2

IB und, wenn man die gleichen Größen gebraucht, $AB^2 = AH^2 + HB^2 + 2\,AH.\,HB$.

Anmerk. Vergleiche man diesen Satz mit §. 64. Arieh. so wird man finden, daß das, was dort von Zahlen bewiesen ward, auch von Linien gelte.

§. 99.

In einem stumpfwinklichten Dreyeck ABC (Fig. 98.) ist das Quadrat der dem stumpfen Winkel gegenüberliegenden Seite AC so groß als die beyden Quadrate der beyden Seiten AB und BC, welche den stumpfen Winkel einschließen, nebst dem zwiefachen Rechtecke aus der Grundlinie AB und dem Stücke BD bis an das Perpendikel CD oder $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\,AB.BD$.

Da die Linie AD in B geschnitten ist, so ist $AD^2 = AB^2 + BD^2 + 2\,AB.\,BD$. (§. 98.), man addire $CD^2 = CD^2$ auf beyden Seiten, so ist $AD^2 + CD^2 = AB^2 + BD^2 + CD^2 + 2\,AB.\,BD$; aber $AD^2 + CD^2 = AC^2$ und $BD^2 + CD^2 = BC^2$ (§. 93.), also $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\,AB.\,BD$.

§. 100.

Wenn eine gerade Linie AB (Fig. 86) in H getheilt ist, so ist das Quadrat der ganzen Linie AB nebst dem Quadrate des einen Stücks der-

derselben AH] so groß als das zwiefache Rechteck aus der ganzen Linie AB und dem andern Stücke HB oder $AB^2 + AH^2 = 2\,AB.\ldots + HB^2$.

Beweis. In dem Beweise §. 98. ist dargethan, daß $GF = HB^2$ und $EH = AH^2$, ferner $DI = IB$ (§. 79.). Addirt man nun EH, so ist $DI + EH = IB + EH$ oder $DH = EB$ und wird dazu wieder EB addirt, so ist $DH + EB = 2\,EB = 2\,AB.AH$. Bey Betrachtung der Figur wird man finden, daß $DH + EB = IGDABFI + EH$, also $IGDABFI + AH^2 = 2\,AB.\,AH$ und, wenn man $GF = HB^2$ addirt, $DB + AH^2 = 2\,AB.\,AH + HB^2$, aber $DB = AB^2$, also $AB^2 + AH^2 = 2\,AB.\,AH + HB^2$.

## §. 101.

In einem spitzwinklichten Dreyeck ABC (Fig. 97.) wird das Quadrat der einen Seite AC von den Quadraten der beyden andern Seiten AB und BC um das zwiefache Rechteck aus der Seite AB, auf welcher CD senkrecht steht, und aus dem durch diese Linie abgeschnittenen Stücke derselben BD, welches von AC am weitesten abliegt, übertroffen oder $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\,AB.\,BD$.

Beweis. Weil AB von der senkrechten Linie CD in D geschnitten wird, so ist $AB^2 + BD^2 = 2\,AB.\,BD + AD^2$ (§. 100); man addire $CD^2$ auf beyden

Seiten, so ist $AB^2 + BD^2 + CD^2 = 2\,AB \cdot BD + AD^2 + CD^2$; nun ist aber $BD^2 + CD^2 = BC^2$ und $AD^2 + DC^2 = AC^2$ (§. 93); also $AB^2 + BC^2 = 2\,AB \cdot BD + AC^2$ und, wenn man $2\,AB \cdot BD$ auf beyden Seiten subtrahirt, $AB^2 + BC^2 - 2\,AB \cdot BD = AC^2$.

## §. 102.

**In jedem Parallelogramm sind die Quadrate auf beyden Diagonalen AC und DB (Fig. 106 und 107.) so groß als die Quadrate aller Seiten des Parallelogramms AB, BC, CD und DA.**

1) Ist das Parallelogramm ABCD (Fig. 106.) rechtwinklicht, so ist im $\triangle$ ABC $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (§. 93.) und im $\triangle$ BCD $BD^2 = BC^2 + CD^2$; also $AC^2 + DB^2 = AB^2 + BC^2 + BC^2 + CD^2$, aber $BC = DA$ (§. 74.) und $BC^2 = DA^2$ (§. 71), also $AC^2 + DB^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$.

2) Ist das Parallelogramm ABCD (Fig. 107.) schiefwinklicht, so verlängere man AB und ziehe die senkrechten Linien BF und EC, welche parallel sind (§. 59); also $FC = BE$ und $FB = CE$ (§. 74). In dem stumpfwinklichten Dreyeck ABC ist $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\,AB \cdot BE$ (§. 99), aber $2\,AB \cdot BE = 2\,CD \cdot CF$, also $AC^2 =$

$AB^2$

$AB^2 + BC^2 + 2\,CD \cdot CF$. In dem spitzwinklichten Dreyeck BDC ist $BD^2 = CD^2 + BC^2 - 2\,CD \cdot CF$; also $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + BC^2$, aber $BC^2 = AD^2$ (§. 71. 74); also $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$.

## Sechstes Kapitel.

## Eigenschaften des Kreises.

### §. 103.

Jede Linie, welche dergestalt durch die Kreisfläche gehet, daß zwey ihrer Puncte im Umfange des Kreises liegen, schneidet den Kreis; so sind Durchmesser und Chorden schneidende Linien.

Eine Linie, welche den Kreis trifft, ohne ihn zu schneiden, heißt eine **Tangente** oder **Berührungslinie**. Ein Kreis A schneidet einen andern B, wenn ein Theil von A innerhalb und ein anderer Theil außerhalb B liegt. Ein Kreis A berührt einen andern Kreis B, wenn A und B sich in ihren Umkreisen treffen, ohne sich zu schneiden. Liegt der eine Kreis in dem andern, so berühren sie sich inwendig; liegt aber der eine Kreis neben dem andern, so berühren sie sich auswendig.

§. 104.

**Alle Puncte einer Chorde AB (Fig. 108), außer den beyden Endpuncten A und B, liegen innerhalb des Kreises.**

Sollte ein in AB angenommener Punct D außerhalb des Umkreises liegen, so müßte $AC < CD$ seyn; liegt D im Umkreise, so ist $CA = CD$ und wenn $AC > CD$, so liegt D innerhalb des Kreises. Das letzte ist es, was bewiesen werden soll. Die Chorde ADB ist eine gerade Linie (§. 13); im $\triangle$ ACB ist $AC = BC$ (§. 14), also $m = n$ (§. 39), aber $x > n$ (§. 48), also $x > m$ (§. 6. Grundſ. 6. Arith.), also $AC > CD$ (§. 51). Weil sich nun dies von jedem in AB angenommenen Puncte beweisen läßt, so liegt die ganze Chorde innerhalb des Kreises und schneidet denselben nur in zwey Puncten A und B.

§. 105.

**Wenn zwey Chorden AB und DE (Fig. 109.) gleich sind, so sind auch die ihnen zugehörigen Bogen AGB und EFD gleich.**

Man ziehe die Linien CA, CB, CD, CE, so ist in den Dreyecken ACB und DCE die Seite $CA = CD$ und $CB = CE$ (§. 14.) und vermöge der Voraussetzung $AB = DE$; also $\triangle ABC = \triangle CDE$, $p = q$ (§. 37.) und Bog. AGB = Bog. DFE (§. 23).

§. 106.

§. 106.

**Wenn zwey Bogen AGB und DFE (Fig. 109.) gleich sind, so sind auch die Chorden dieser Bogen gleich oder AB = DE.**

Da Bog. AGB = Bog. DFE, so ist p = q (§. 23); ferner ist AC = CD und BC = CE (§. 14); also AB = DE (§. 37).

§. 107.

**Ein Durchmesser DE (Fig. 110.), welcher die Chorde AB in zwey gleiche Theile theilt, ist auf derselben senkrecht.**

Man ziehe CA und CB, so ist in den Dreyecken AFC und FCB AC = CB (§. 14), CF = CF und AF = FB, also x = y (§. 41.) und DE senkrecht auf AB (§. 11.)

§. 108.

**Wenn der Durchmesser DE (Fig. 110.) senkrecht auf der Chorde AB steht, so theilt er dieselbe in zwey gleiche Theile AF = FB.**

In den Dreyecken ACF und FCB ist AC = CB (§. 14), A = B (§. 39.) und x = y = R (§. 11); also AF = FB (§. 68.)

**Anmerk.** Aus dem gegebenen Beweise erhellet, daß der Winkel ACE = BCE; also auch Bog. AE = EB (§. 23), woraus folgt, daß die senkrechte Linie aus dem Mittelpuncte sowohl

die Chorde als den Bogen in zwey gleiche Theile theilt.

§. 109.

**Eine Linie DE (Fig. 111), welche senkrecht auf der Chorde AB steht und dieselbe in zwey gleiche Theile AF = FB theilt, ist ein Durchmesser oder geht durch den Mittelpunct C.**

Man ziehe die Chorden AD, DB, BE und EA, so ist in den Dreyecken ADF und BDF AF = FB, DF = DF und x = y, folglich AD = DB (§. 37.) und Bog. AGD = DHB (§. 105). In den Dreyecken AFE und BFE ist AF = BF, FE = FE und F = F (§. 11); also AE = EB (§. 37.) und der Bog. EIA = Bog. ERB (§. 105). Addirt man nun diese Bogen, so ist AGD + EIA = DHB + ERB; also ist DE eine solche Linie, welche den Umfang des Kreises in zwey gleiche Theile theilt, folglich ein Durchmesser und geht durch den Mittelpunct C (§. 22).

§. 110.

**Den Mittelpunct eines gegebenen Kreises zu finden (Fig. 110).**

1) Man ziehe, wo man will, eine Chorde AB.
2) Diese theile man durch eine senkrechte Linie DE in zwey gleiche Theile AF = FB (§. 45).
3) Die Linie DE theile man in zwey gleiche Theile in C, so ist C der gesuchte Mittelpunct.

Be-

**Beweis.** Weil DE auf der Chorde AB senkrecht steht und diese in zwey gleiche Theile theilt, so ist DE ein Durchmesser (§. 109.) und also liegt in der Mitte desselben der Mittelpunct C (§. 13. 14.)

## §. 111.

**Durch drey Puncte A, B, C (Fig. 112), welche nicht in gerader Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben.**

1) Man verbinde die Puncte A, B, C durch die Linien AB und BC.

2) Durch die senkrechte Linie DE theile man AB in zwey gleiche Theile AL = LB (§. 45.) und eben so BC durch GF in BM = MC.

3) Aus dem Schneidungspuncte H dieser beyden Linien als aus einem Mittelpuncte beschreibe man mit der Zirkelöfnung HA einen Kreis, welcher durch die beyden andern gegebenen Puncte B und C gehen wird.

**Beweis.** In den Dreyecken ALH und BLH ist AL = LB, LH = LH, L = L (§. 11) also HA = HB (§. 37); in den Dreyecken HBM und HCM ist BM = MC, HM = HM, M = M; also HB = HC (§. 37.) und HA = HB = HC. Diese Linien sind also Halbmesser eines und desselben Kreises, welcher durch die drey gegebenen Puncte A, B, C gehen muß (§. 13).

An-

**Anmerk.** Da die drey Puncte A, B, C, welche nicht in gerader Linie liegen, ein Dreyeck ABC bilden (§. 36.), so erlernt man aus der Auflösung dieser Aufgabe zugleich die Art und Weise, wie man einen Kreis um ein gegebenes Dreyeck beschreibet.

## §. 112.

**Wenn zwey Chorden AB und DE (Fig. 113.) gleich groß sind, so liegen sie gleich weit vom Mittelpuncte C oder es ist CF = CG und umgekehrt, liegen sie gleich weit vom Mittelpuncte C, so sind sie gleich groß.**

1) Man ziehe AC, BC, DC und EC, fälle vom Mittelpuncte C auf AB und DE die senkrechten Linien CF und CG, durch welche die Chorden in zwey gleiche Theile zerlegt werden, so daß $AF = BF = \frac{1}{2}AB = DG = GE = \frac{1}{2}DE$ ist (§. 108). Da ferner die Dreyecke ACB und DCE gleichgroße gleichschenklichte Dreyecke sind (§. 105), so ist $B = E$. In den Dreyecken CFB und CGE ist $BC = CE$ (§. 14), $BF = GE$ und $B = E$; also $CF = CG$ (§. 37).

2) Wenn der Abstand der Chorden gleich ist oder $CF = CG$, so sind in den beyden rechtwinklichten Dreyecken BCF und CEG die Hypotenusen CB und CE gleich (§. 14); also $CB^2 = CE^2$ (§. 71.) und $CF^2 + FB^2 = CG^2 + GE^2$ (§. 93)

aber

aber $CF^2 = CG^2$ (vermöge der Bedingung und §. 71); also, wenn man $CF^2 = CG^2$ subtrahirt, $BF^2 = EG^2$ (§. 6. Grundſ. 4. Arith.) und $BF = EG$ (§. 72.) und $2BF = 2EG$, d. h. $AB = DE$ (§. 108).

§. 113.

**Berühren ſich zwey Kreiſe inwendig in A (Fig. 114), ſo wird die Linie AF, welche durch ihre Mittelpuncte C und H gehet, zugleich durch ihren Berührungspunct A gehen.**

Geht die Linie durch die Mittelpuncte beyder Kreiſe nicht durch A, ſo gehe ſie durch B und der Mittelpunct des kleinern Kreiſes muß irgendwo in dieſer Linie, etwa in D liegen. Im Dreyeck CDA iſt $CD + DA > AC$ (§. 53), aber $AC = CB$ (§. 14), alſo $CD + DA > CB$ und, wenn man auf beyden Seiten $CD = CD$ ſubtrahirt, $DA > DB$. Da aber D als der Mittelpunct des kleinern Kreiſes angenommen worden iſt, ſo iſt $DA = DG$, alſo $DG > DB$ (§. 6. Grundſ. 6. Arith.) oder ein Theil größer als das Ganze, und da dies unmöglich iſt, ſo muß es auch unmöglich ſeyn, daß der Mittelpunct H des kleinern Kreiſes außerhalb der Linie AF, welche durch den Berührungspunct A und den Mittelpunct des größern Kreiſes C geht, liegen könne.

§. 114.

**Wenn zwey Kreiſe ſich auswendig berühren, ſo wird die gerade Linie EF (Fig. 115.) durch die Mit-**

Mittelpuncte E und F durch den Berührungspunct A gehen.

*I. Anm.* Will man dies nicht zugeben, so müssen die Mittelpuncte außerhalb der Linie EF z. B. in B und C liegen. Man ziehe nun die Linien AB, BC, AC, so ist AB = BD (§. 14.) und AC = CG, also AB + AC = BD + CG und, wenn man zu BD + CG noch DG addirt, AB + AC < BD + DG + CG = BC oder AB + AC < BC. Da es aber unmöglich ist, daß zwey Seiten kleiner als die dritte seyn können (§. 53), so ist es auch unmöglich, daß die beyden Mittelpuncte außerhalb der Linie durch den Berührungspunct A liegen können.

§. 115.

**Zwey Kreise, welche sich auswendig berühren, berühren sich in Einem Puncte.**

Nimmt man an, daß die beyden Kreise M und N (Fig. 116.) sich in zwey Puncten A und B berühren, so ziehe man die Chorde AB, welche innerhalb beyder Kreise liegt (§. 104); also müssen Kreise, welche mehr als Einen Punct gemeinschaftlich haben, sich schneiden und nicht berühren (§. 103), welches gegen die Voraussetzung ist.

§. 116.

**Eine gerade Linie FB (Fig. 117), welche senkrecht auf dem Halbmesser AC in A steht, ist eine Tangente.**

Man

Man nehme einen Punct D so nahe bey A an, als man will und ziehe DC, so ist in dem rechtwinklichten Dreyeck CAD der Winkel A > D (§. 49), also CD > CA (§. 51), aber CA = CE, also CD > CE; also liegt jeder Punct der Linie FB (ausgenommen A) außerhalb der Peripherie des Kreises und FB ist eine Tangente (§. 103).

## §. 117.

**An einen gegebenen Punct A (Fig. 117.) eine Tangente zu ziehen.**

1) Man ziehe einen Halbmesser CA.

2) In A errichte man eine senkrechte Linie BF (§. 43), welche die Tangente ist (§. 116).

## §. 118.

**Jede gerade Linie AE (Fig. 118), welche mit dem Halbmesser AC einen spitzen Winkel CAE macht, liegt innerhalb der Peripherie des Kreises und schneidet dieselbe in zwey Puncten A und E.**

Man fälle vom Mittelpuncte C die senkrechte Linie CF auf AE (§. 44), so ist ACF ein rechtwinklichtes Dreyeck (§. 36), folglich AC > CF (§. 51.) und der Punct F liegt innerhalb des Kreises. Nimmt man einen Punct G näher bey A an, so wird CGA ein stumpfer Winkel und also AC > CG, also liegt auch dieser Punct G und jeder andere innerhalb der Peripherie des Kreises.

Macht

Macht man einen Winkel ECF = FCA (§. 30.) und ziehet AE, so ist in den Dreyecken ACF und FCE die Seite AC = CE (§. 14.) und CF = CF; also beyde Winkel beyF gleich große und rechte Winkel, also AE eine gerade Linie (§. 32), welche den Kreis in zwey Puncten A und E schneidet.

Anmerk. Den Winkel BAE (Fig. 117), welchen die Tangente AB mit dem Bogen AE macht, nennt man den **Berührungswinkel** (angulus contactus), und dieser ist, wie man sich ausdrückt, kleiner als jeder angebliche spitze Winkel; hingegen ist der Winkel CAE, welchen der Bogen mit dem Radius macht, größer als jeder spitze Winkel, weil jede Chorde, die man aus A ziehet, innerhalb des Bogens fällt (§. 104). Diese geometrischen Paradoxen findet man in Euklides Elementen 3 Buch 16 Propos., obgleich es sehr wahrscheinlich ist, daß sie von seinen Herausgebern und Commentatoren hinzugefügt sind. (The Elements of Euclides by R. Simson. Edinb. 1775. Notes p. 309.) Diese Sätze haben vielen Streit unter den Geometern veranlaßt. J. Pelletier oder Peletarius hegte die Meinung, daß der Berührungswinkel gar keine Größe hätte (Commentarii de circuli dimensione). Clavius hat beweisen wollen, daß er eine Größe habe, aber ein Winkel von anderer Art als der geradlinichte sey (Clavii opera math. Tom. I. Comment. in Euclid. Lib. III.

prop.

prop. 16. p. 117-130). Wallis ist Pelletiers Meinung und vertheidigt dieselbe gegen Clavius (J. Wallisii opera math. Tom. II. Tractatus de angulis contactus p. 605-663). Tacquet wollte die Schwierigkeit dadurch heben, daß er annahm, kein Winkel, selbst der geradlinichte nicht, habe eine Größe (Tacquet elem. geom. planae et solidae. Amsterd. 1683. p. 86-93). Wenn man unter einer Größe etwas versteht, was Theile hat und sich theilen läßt, so ist der geradlinichte Winkel ohne Zweifel eine Größe. Gleichfalls ist der sogenannte Berührungswinkel BAE (Fig. 119.) eine wirkliche Größe, weil er sich durch die Bogen AD und AH, die mit den Halbmessern AM und AN > AC beschrieben sind, in Theile zerlegen läßt; eigentlich aber sollte man nicht einer geraden und krummen Linie oder zwey aus Einem Punct ausgehenden krummen Linien den Namen eines Winkels beylegen und in so fern hat Clavius Recht, daß man das, was kein Winkel ist, eben so wenig mit einem Winkel, als eine gerade Linie mit einer Fläche oder eine Fläche mit einem geometrischen Körper, vergleichen könne.

§. 119.

**Eine Linie AC (Fig. 117.), welche durch den Mittelpunct C und den Berührungspunct A gehet, oder der Halbmesser AC steht auf der Tangente FAB senkrecht.**

Ist CA nicht senkrecht auf AB, so muß man eine andere senkrechte Linie CD auf AB ziehen können (§. 44), wodurch CAD ein bey D rechtwinklichtes Dreyeck wird (§. 36.) und AC > CD (§. 49. 51). Aber AC = CE (§. 14); also CE > CD oder ein Theil größer als das Ganze. Da aber das unmöglich ist, so läßt sich auch aus dem Mittelpuncte keine andere Linie als CA ziehen, welche auf AB senkrecht ist.

§. 120.

**Errichtet man im Berührungspuncte A (Fig. 120.) eine senkrechte Linie AC auf AB, so geht dieselbe durch den Mittelpunct C.**

Geht AC nicht durch den Mittelpunct, so muß man den Mittelpunct finden können (§. 110.) und es sey derselbe etwa in D. Man ziehe nun die Linie AD, so ist BAD = R (§. 119); aber vermöge der Voraussetzung ist BAC = R, also BAD = BAC oder ein Theil so groß als das Ganze. Da aber dies unmöglich ist, so kann keine andere Linie als AC durch den Mittelpunct gehen.

§. 121.

**Der Winkel am Mittelpunct ACB (Fig. 121.) ist zweymal so groß als der Winkel an der Peripherie ADB, wenn beyde auf demselben Bogen stehen.**

Hier sind drey Fälle möglich:

1)

1) Wenn der Mittelpunct C in der Linie AD oder in einem der Schenkel des Winkels liegt. Im △ CBD ist CB = CD (§. 14), B = D (§. 39), und, wenn man D addirt, B + D = 2 D, aber x = B + D (§. 66), also x oder ACB = 2 D.

2) Wenn C (Fig. 122.) zwischen den Schenkeln AD und BD des Peripheriewinkels ADB liegt. Man ziehe DCE, so ist x = 2 y und p = 2 q und, wenn man addirt, x + p = 2 y + 2 q = 2 (q + y) oder ACB = 2 ADB.

3) Wenn C (Fig. 123.) weder in einem der Schenkel noch zwischen ihnen, sondern außerhalb AD und BD liegt. Man ziehe DCE, so entstehe ein Mittelpunctswinkel ECB und ein Peripheriewinkel EDB; also x + p = 2 y + 2 q, aber x = 2 y, also p = 2 q oder ACB = 2 ADB.

## §. 122.

Aus diesem Satze lassen sich folgende wichtige Schlüsse herleiten:

1) Jeder Winkel ADB (Fig. 121. 122. 123.), dessen Spitze in der Peripherie des Kreises liegt, hat zu seinem Maaße den halben Bogen AB, auf welchem er stehet oder ADB = ½ AB. Man ziehe von den äußersten Puncten des Bogens AB Linien zum Mittelpuncte C. so ist ACB = 2 ADB (§. 121.), aber ACB = AB

(§. 20.), also Bogen AB = 2 ADB und durch die Division mit 2 ist $\frac{1}{2}$ AB = ADB.

2) Alle Winkel in einem und demselben Kreisabschnitte AFEDB (Fig. 124.) sind gleich groß; denn x = $\frac{1}{2}$ AGB, p = $\frac{1}{2}$ AGB, q = $\frac{1}{2}$ AGB; also x = p = q.

3) Die Winkel in einem Abschnitte, welcher größer als der Halbkreis ist, sind spitz. Da AEB + BGA = 4 R = 360° (§. 33.) und vermöge der Voraussetzung AEB > 2 R oder 180°, so ist BGA < 2 R oder 180°, also $\frac{1}{2}$ BGA < R oder 90°, also x = p = q < R oder 90°, also spitz (§. 24.)

4) Wenn der Abschnitt ein Halbkreis ist, (Fig. 125), so sind die Winkel in demselben rechte Winkel; denn F = E = $\frac{1}{2}$ BGA = R = 90°.

5) Ist der Abschnitt kleiner als ein Halbkreis, (Fig. 126) so sind die Winkel in demselben stumpf; denn AGB > 2R und $\frac{1}{2}$ AGB = AFB > R.

123.

Im Endpuncte A (Fig. 127.) einer geraden Linie AB eine senkrechte Linie AD zu errichten.

1) Man wähle einen Punct C und beschreibe mit einer Zirkelöfnung = AC einen Bogen, der größer als der Halbkreis ist und die Linie in B schneidet.

2)

2) Man ziehe BC und verlängere sie, bis sie den Halbkreis in D schneidet.

3) Man ziehe AD, so ist diese die senkrechte Linie, weil BAD ein Halbkreis und A = R ist (§. 122. Num. 4.), also ist AD senkrecht auf AB (§. 11).

§. 124.

Von einem gegebenen Puncte A außerhalb des Kreises EBF (Fig. 128) eine Tangente an den Kreis zu ziehen.

1) Man ziehe AC und theile sie in D in zwey gleiche Theile (§. 45).

2) Aus D mit dem Halbmesser DC = DA beschreibe man einen Kreis, welcher den gegebenen Kreis in E und F schneidet.

3) Aus A ziehe man AE und AF, so sind die Linien Tangenten.

Beweis. Man ziehe CE und CF, so sind bey E und F rechte Winkel (§. 122. Num. 4.); also AE und AF auf den Halbmessern senkrecht (§. 11.) und folglich Tangenten (§. 116.).

§. 125.

Wenn man von einem Puncte A (Fig. 128) zwey Linien AE und AF ziehet, welche den Kreis FBE berühren, so sind diese Tangenten gleich groß oder AE = AF und wenn man zum Mittelpuncte C die Linie AC ziehet, so theilt diese

den Winkel FAE, welchen die Tangenten mit einander machen, in zwey gleiche Theile m = n.

CE = CF (§. 14.), also auch Bog. CE = Bog. CF (§. 105.) und $\frac{1}{2}$ CE = $\frac{1}{2}$ CF und m = n (§. 122. Num. 1.). Ferner E = F = R (§ 122. Num. 4.), also m + E = n + F und x = y (§. 67. Num. 1.). In den Dreyecken AEC und AFC ist AC = AC, m = n, x = y, also AE = AF (§. 46.)

## §. 126.

Der Winkel DAE (Fig. 129), welcher die Chorde EA mit der Tangente BD macht, ist so groß als der halbe Bogen AGE, welchen die Chorde abschneidet oder als der Winkel in dem entgegengesetzten Abschnitt AHFE.

Man ziehe den Durchmesser AF durch den Berührungspunct A; er steht also auf der Tangente BAD senkrecht (§. 119.). Man ziehe FE, so ist p = R (§. 122. Num. 4.). Nun ist z + y + x = 2 R (§. 31.), aber auch p + q + y = 2 R. (§. 66); also z + y + x = p + q + y, also, wenn man y auf beyden Seiten subtrahirt, z + x = q + p; man subtrahire ferner z = p = R, so ist x = q, aber q = $\frac{1}{2}$ AGE (§. 122. Num. 1.), also x = $\frac{1}{2}$ AGE. Weil nun alle Winkel im Segment AHFE gleich sind, (§. 122. Num. 2.), so ist auch der Winkel x so groß, als jeder Winkel im Segment AHFE.

§

§ 127.

Wenn zwey Linien AB und CD (Fig. 130.) sich in einem Kreise in E durchschneiden, so hat der Winkel CEB = y zu seinem Maaße den halben Bogen AD nebst dem halben Bogen CB, welche von den Winkeln E und y abgeschnitten werden.

Man ziehe AC, so ist $y = p + q$ (§. 66), aber $p = \frac{1}{2}$ CB und $q = \frac{1}{2}$ AD (§. 122. Num. 1.), also $y = E = \frac{1}{2}$ CB $+ \frac{1}{2}$ AD.

§. 128.

Wenn von einem Puncte E (Fig. 131.) zwey Linien EA und EB gezogen werden, die beyde den Kreis schneiden, so ist der Winkel E dem halben Unterschiede der Bogen gleich, welche zwischen den Schenkeln des Winkels E liegen, oder $E = \frac{1}{2}$ AB $- \frac{1}{2}$ CD.

Man ziehe AD, so ist $q = p + E$ (§. 66), aber $q = \frac{1}{2}$ AB und $p = \frac{1}{2}$ CD (§. 122. Num. 1.), also $\frac{1}{2}$ AB $= \frac{1}{2}$ CD $+ E$ und $\frac{1}{2}$ AB $- \frac{1}{2}$ CD $= E$.

§. 129.

Wenn aus einem Puncte E (Fig. 132.) zwey Linien gezogen werden, deren eine EA den Kreis berührt, die andere EB ihn schneidet, so ist $E = \frac{1}{2}$ AB $- \frac{1}{2}$ AD.

Man ziehe die Linien AD und AB, so ist $q = x + E$ (§. 66), $x = p$ (§. 126), also $q = E + p$,

aber $q = \frac{1}{2} AB$ und $p = \frac{1}{2} AD$ (§. 122. Num. 1.), also $\frac{1}{2} AB = E + \frac{1}{2} AD$ und, wenn man $\frac{1}{2} AD$ subtrahirt, $\frac{1}{2} AB - \frac{1}{2} AD = E$.

§. 130.

Wenn man von einem Puncte E (Fig. 133.) zwey Linien EA und EB ziehet, welche beyde den Kreis in A und B berühren, so ist der Winkel AEB, den die beyden Tangenten mit einander machen, so groß als der halbe Unterschied zwischen dem concaven Bogen ACB und dem convexen Bogen ADB oder $AEB = \frac{1}{2} ACB - \frac{1}{2} ADB$.

Man ziehe die Linie EDC durch den Mittelpunct, so ist $y = \frac{1}{2} AC - \frac{1}{2} AD$ (§ 129.) und $x = \frac{1}{2} CB - \frac{1}{2} DB$ und, wenn man addirt, $y + x = AEB = \frac{1}{2} ACB - \frac{1}{2} ADB$.

§. 131.

Man sagt, eine geradlinichte Figur sey in den Kreis beschrieben, wenn jede Ecke derselben in dem Umfange des Kreises liegt, wo man dann zugleich sagt, der Kreis sey um die Figur beschrieben. Eine geradlinichte Figur ist um den Kreis beschrieben, wenn jede Seite derselben den Kreis berührt und in diesem Fall ist der Kreis in die Figur beschrieben.

§. 132.

In jeder vierseitigen Figur ABCD (Fig. 134), welche in den Kreis beschrieben ist, machen die bey-

beyden entgegenstehenden Winkel A + C zwey rechte Winkel aus.

BAD + DCB = 4R (§. 33.) und $\frac{1}{2}$BAD + $\frac{1}{2}$DCB = 2R, aber C = $\frac{1}{2}$BAD und A = $\frac{1}{2}$BCD (§. 122. Num. 1.), also A + C = 2R.

## §. 133.

**In ein gegebenes Dreyeck ABC (Fig. 135.) einen Kreis zu beschreiben.**

1) Man theile A durch AD in zwey gleiche Theile (§. 42) x = y und B durch BD in p = q.

2) Von dem Schneidungspuncte dieser Linien D ziehe man auf die Seiten des Dreyecks die senkrechten Linien DE, DF, DG (§. 44).

3) Aus D mit dem Halbmesser DE = DF = DG beschreibe man einen Kreis, welcher die Seiten des Dreyecks in E, F, G berühren und daher in das Dreyeck beschrieben seyn wird.

**Beweis.** Es muß bewiesen werden, daß D der Mittelpunct des Kreises oder DE = DF = DG ist. In den Dreyecken AGD und AED ist AD = AD, x = y, G = E = R, also DG = DE (§. 68); in den Dreyecken BED und BFD ist BD = BD, p = q, E = F = R, also DE = DF (§. 68); aber auch DG = DE, also DE = DF = DG, oder D ist der Mittelpunct des Kreises, welcher die Seiten des Dreyecks in E, F, G berührt (§. 103. 116); also ist der Kreis in das Dreyeck ABC beschrieben (§. 131).

§. 134.

**In einen gegebenen Kreis ein Quadrat zu beschreiben.** (Fig. 136).

1) Man ziehe einen Durchmesser AB.

2) Ziehe einen zweyten Durchmesser DE senkrecht auf AB (§. 13).

3) Ziehe AD, DB, BE und EA, so ist ADBE ein in den Kreis beschriebenes Quadrat.

**Beweis.** Daß $A = D = B = E = R$ ist, erhellet daraus, daß alle Winkel in einem Halbkreise rechte Winkel sind, (§. 122. Num. 4.) In den Dreyecken ACD und BCD ist $AC = CB$ (§. 14.), $CD = CD$, $m = n = R$; also $AD = DB$ (§. 37). Auf eben die Art wird bewiesen, daß $DB = BE$ und $BE = EA$ ist; also $AD = DB = BE = EA$ und folglich ADBE ein Quadrat (§. 69).

§. 135.

**Ein Quadrat um einen gegebenen Kreis AEBD zu beschreiben** (Fig. 137).

1) Man ziehe zwey Durchmesser AB und DE senkrecht auf einander.

2) Durch A und B ziehe man IF und HG senkrecht auf AB (§. 123).

3) Durch D und E ziehe man IH und FG senkrecht auf DE, so ist FGHI ein um den Kreis beschriebenes Quadrat.

Be-

Beweis: IH und FG sind senkrecht a
also parallel (§. 59). IF, HG und DE si
auf AB und also parallel. $A + I = 2R =$
(§. 60); aber $A = B = R$, also $I = H = R$; eben so ist $A + F = 2R = B + C$ (§. 60.) und also $F = G = R$, folglich die Figur FGHI rechtwinklicht. Ferner sind IB und AG Parallelogramme (§. 69), also $IH = AB = FG$ (§. 74); aber FD und DG sind ebenfalls Parallelogramme, also $IF = DE = GH$ (§. 74), aber $AB = DE$ (§. 14), also $IF = FG = GH = HI$. Die Figur FGHI ist also rechtwinklicht und gleichseitig, folglich ein Quadrat.

## §. 136.

Das Quadrat ABCH (Fig. 138.) um den Kreis ist zweymal so groß als das Quadrat DEFG in dem Kreise.

$AF = 2 \triangle DGF$ (§. 88), $DC = 2 \triangle DEF$, also $AF + DC = 2 \triangle DGF + 2 \triangle DEF$ oder Quadrat $AC = 2$ DEFG.

## Siebentes Kapitel.

### Von ähnlichen Figuren und proportionirten Seiten.

§. 137.

Zwey Parallelogramme ABCD und EFGH (Fig. 139) sind im zusammengesetzten Verhältniß ihrer Grundlinien AB und EF und ihrer Höhen BC und FG.

Die Fläche des Parallelogramms ABCD ist = AB BC und EFGH = EF. FG (§. 85. 86. 87); also ABCD : EFGH = AB. BC : EF. FG; aber AB. BC : EF. FG ist aus AB : EF und BC : FG zusammengesetzt (§. 93. Arith.); also sind ABCD und EFGH im zusammengesetzten Verhältniß ihrer Grundlinien und Höhen.

§. 138.

Hieraus folgt:

1) Wenn die Grundlinien zweyer Parallelogramme gleich sind oder AB = EF (Fig. 139), so verhalten sich diese wie ihre Höhen BC und FG; denn ABCD : EFGH = AB. BC : EF. FG (§. 137) aber AB = EF, also ABCD : EFGH = AB. BC : AB. FG = BC : FG (§. 74. Arith.)

2)

2) Sind die Höhen gleich, BC = FG, so verhalten sich die Parallelogramme wie die Grundlinien AB und EF; denn ABCD : EFGH = AB . BC : EF . FG, aber BC = GF, also ABCD : EFGH = AB . BC : EF . BC = AB : EF (§. 74. Arith.)

§ 139.

Zwey Dreyecke ABC und DEF (Fig. 140.) sind im zusammengesetzten Verhältniß ihrer Grundlinien AB und DE und Höhen CG und FH.

Man ziehe CI und BI parallel mit AB und AC (§. 65.) und ferner FK und KE mit DE und DF, so ist ABIC : DEKF = AB . CG : DE . FH (§. 137.) und $\frac{1}{2}$ ABIC : $\frac{1}{2}$ DEKF = AB . CG : DE . FH (§. 74 Arith.) aber $\frac{1}{2}$ ABIC = △ ABC und $\frac{1}{2}$ DEKF = △ DEF (§. 74.); also △ ABC : △ DEF = AB . CG : DE . FH.

§. 140.

Auf eben die Art, wie bey Parallelogrammen (§. 138) bewiesen ist, folgt hieraus:

1) Wenn zweyer Dreyecke Grundlinien gleich sind, AB = DE, so erhalten sich die Dreyecke wie ihre Höhen oder △ ABC : △ DEF = CG : FH.

2) Wenn

2) Wenn die Höhen gleich sind, so verhalten sich die Dreyecke wie ihre Grundlinien oder $\triangle ABC : \triangle DEF = AB : DE$.

Anmerk. Weil der Satz, daß Dreyecke ABC und DEF (Fig. 141.) bey gleichen Höhen oder zwischen Parallellinien CF und AE sich wie ihre Grundlinien AB und DE verhalten, der Grund der nicht allein in der Geometrie sondern in der ganzen Mathematik wichtigen Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren ist, so will ich hier noch einen andern Beweis desselben anführen. Es sey ein gewisses Verhältniß unter den Grundlinien AB und DE z. B. $= 4 : 3 = m : n$, so folgt daraus, daß, wenn man DE in drey gleiche Theile theilt, Dd, d e und eE oder $Dd = de = eE$, AB vier dieser Theile enthalte: $Aa = ab = bc = cB$ (§. 73. 74. Arith.). Ziehet man nun dF, eF, aC, bC u. s. w. so sind diese kleinen Dreyecke gleich oder $DdF = deF = eEF = AaC = abC$ u. s. w., weil sie gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben (§. 89.); also ist $\triangle DEF = 3 \triangle DdF = n . \triangle DdF$ und $\triangle ABC = 4 \triangle AaC = m . \triangle DdF$; folglich $\triangle ABC : \triangle DEF = m . \triangle DdF : n . \triangle DdF = m : n$ (§. 74. Arith.), aber $m : n = AB : DE$ (vermöge der Bedingung); also $\triangle ABC$

ABC : △ DEF = AB : DE (§. 77. Arith.). Wie nun auch das Verhältniß der Grundlinien beschaffen seyn mag, so läßt sich dennoch immer derselbe Beweis anwenden. Es sey z. B. DE : AB = 2 : $4\frac{1}{5}$ = 2 : $\frac{21}{5}$ = 10 : 21 (§. 74. Arith.), so ist DE = 10 und AB = 21 dieser Theile; also △ ABC : △ DEF = 21 △ DdF : 10 DdF = 21 : 10 = AB : DE.

## §. 141.

**Wenn man in einem Dreyeck ABC (Fig. 142) eine Linie parallel mit der Grundlinie ziehet, so schneidet sie die Seiten AC und CB in Theile, die sowohl unter sich als mit den ganzen Seiten proportionirt sind, d. h. AD : DC = BE : EC, AC : CD = BC : CE und AC : AD = BC : BE.**

Man ziehe die Linien AE und BD. Wenn man nun AD und DC als die Grundlinien ansiehet, so haben die Dreyecke ADE und CDE gleiche Höhe, weil ihre Spitzen in Einem Puncte E liegen und sich aus E nur eine senkrechte Linie auf ADC ziehen läßt (§. 49. Num 4.)

Gleichfalls haben die Dreyecke DEB und DEC, welche auf den Grundlinien BE und EC stehen, gleiche Höhe; also △ ADE : △ CDE = AD : DC (§. 140. Num. 2.); aber △ ADE = △ DEB (§. 89.) also △ BED : △ CDE = AD : CD, aber △ BED : △ CDE

CDE = BE : EC (§. 140. Num. 2.); also AD : DC = BE : EC (§. 77. Arith.).

In dieser Proportion addire man die vorhergehenden und nachfolgenden Glieder, so ist AD + DC : DC = BE + EC : EC (§. 85. Num. 1. Arith.) oder AC : DC = BC : EC; ferner AD : AD + DC = BE : BE + EC (§. 85. Num. 2. Arith.) oder AD : AC = BE : BC oder AC : AD = BC : BE (§. 80. Num. 1. Arith.).

§. 142.

**Zu zwey gegebenen Linien P und Q (Fig. 143) die dritte geometrische Proportionallinie zu finden.**

1) Man mache AB = P und BC = Q.

2) An A setze man einen beliebig großen Winkel CAE und mache AD = Q.

3) Man ziehe BD und durch C die Linie CE parallel mit BD (§. 65.), so ist DE die dritte Proportionallinie.

Beweis. Im △ ACE ist BD parallel mit CE, also AB : BC = AD : DE (§. 141) und vermöge der Construction P : Q = Q : DE; also ist DE die dritte Proportionallinie zu P und Q. (§. 97. Arith.)

§. 143.

**Zu drey gegebenen Linien P, Q, R (Fig. 144) die vierte Proportionallinie zu finden.**

1) Man

1) Man ziehe eine Linie, mache AB = P und BC = Q.

2) Mache einen beliebig großen Winkel CAE und mache AD = R.

3) Ziehe BD und CE mit BD parallel (§. 65), so ist DE die vierte Proportionallinie zu P, Q, R.

**Beweis.** AB : BC = AD : DE (§. 141.) und vermöge der Construction P : Q = R : DE, also ist DE die vierte Proportionallinie zu P, Q, R (§. 98. Arith.).

§. 144.

**Wenn eine Linie DE (Fig. 142.) die Seiten eines Dreyecks ABC in proportionirte Stücke, AD : DC = BE : EC, schneidet, so ist sie der dritten Seite AB parallel.**

Man ziehe die Linien AE und DB, so ist AD : DC = △ ADE : △ DEC (§ 140. Num. 2.); aber vermöge der Bedingung ist AD : DC = BE : EC, also BE : EC = △ ADE : △ DEC (§. 77. Arith.), nun ist BE : EC = △ BED : △ DEC (§ 140. Num. 2.), also △ ADE : △ DEC = △ BED : △ DEC (§. 77. Arith.) und folglich △ ADE = △ BED (§. 76. Arith.) und also DE mit AB parallel (§. 90).

§. 145.

**Wenn man in einem Dreyeck ABC (Fig. 145.) den Winkel an der Spitze ACB in zwey gleiche Theile x = y theilt, so verhalten sich die abge-**

schnittenen Stücke der Grundlinie AD und DB, wie die übrigen Seiten AC und CB.

Man verlängere AC und mache CE = CB, so ist p = q (§. 39.) und 2 q = p + q. Ferner ist der äußere Winkel x + y = p + q = 2 q (§. 66); aber vermöge der Bedingung ist x = y und x + y = 2 y, also 2 y = 2 q und y = q; also CD mit EB parallel (§. 62.) und AD : DB = AC : CE (§. 141), aber CE = CB, also AD : DB = AC : CB.

§. 146.

**Wenn in einem Dreyeck ABC (Fig. 145.) der Winkel an der Spitze C durch die Linie CD dergestalt geschnitten wird, daß AD : DB = AC : CB ist, so wird der Winkel C in zwey gleiche Theile x = y getheilt.**

Man verlängere AC und mache CE = CB, so ist AD : DB = AC : CE, also CD mit BE parallel (§. 144), die Wechselwinkel gleich oder q = y und x = p (§. 60), aber CE = CB, also q = p (§. 39); folglich x = y.

§. 147.

**Aehnliche Figuren** heißen solche, welche gleich viele und gleich große Winkel haben und deren gleichliegende Seiten proportionirt sind. **Gleichliegende oder homologe Seiten** nennt man diejenigen, welche gleichen Winkeln gegenüberliegen. Die Aehnlichkeit der Figuren bezeichnet man durch ∽.

§.

§. 148.

**Wenn in zwey Dreyecken ABC und DEF (Fig. 146.) alle Winkel gleich sind, A = D, B = E und C = F, so sind die homologen Seiten proportionirt, d. h.**

1) AB : AC = DE : DF
2) AB : BC = DE : EF
3) AC : CB = DF : FE.

Wenn die Dreyecke noch nicht neben einander liegen, so schiebe man sie dergestalt an einander, daß die Puncte B und D zusammen fallen und AB und DE nur Eine Linie ausmachen. Man verlängere AC und FE so lange, bis sie sich in G schneiden. Da nun A = D = EDF, so ist AG mit BF parallel (§. 62). ABC oder B = E, also CB parallel mit GE, folglich CBFG ein Parallelogramm (§. 69), in welchem CB = GF und BF = CG (§. 74). Das Dreyeck AGE wird also von der Parallele CB geschnitten; daher ist AB : DE = AC : CG (§. 141), aber CG = DF, also AB : DE = AC : DF und AB : AC = DE : DF (§. 81. Arith.). Ferner wird das Dreyeck AGE durch die Parallele BF geschnitten, so daß AB : DE = GF : FE (§. 141), aber GF = BC, also AB : DE = BC : FE und AB : BC = DE : FE.

Nimmt man nun beyde so eben erwiesene Proportionen, nachdem man die erste umgekehrt hat (§. 80. Arith.)

AC : AB = DF : DE
AB : BC = DE : EF

und schließt nach der Kettenregel oder ordinatim ex aequo, so erhält man AC : BC = FD : EF (§. 91. Arith.)

## §. 149.

Aus diesem Lehrsatze folgt:

1) **Wenn zwey Dreyecke nur zwey gleiche Winkel haben, so sind sie ähnlich**; denn wenn zwey Winkel gleich sind, so ist auch der dritte gleich (§. 67. Num. 1.) und alsdann müssen auch die Seiten proportionirt seyn (§. 148).

2) **Alle gleichseitige Dreyecke**, in welchem jeder Winkel $= \frac{2}{3}$ R $= 60°$ ist (§. 67. Num. 5.), **sind ähnlich.**

3) **Alle gleichschenklichte Dreyecke mit einem rechten Winkel sind ähnlich**; denn jeder Winkel an der Hypotenuse ist $= \frac{1}{2}$ R $= 45°$ (§. 67. Num. 3.)

4) **Alle gleichschenklichte Dreyecke, wenn sie gleich nicht rechtwinklicht sind, aber nur Einen gleichen Winkel an der Spitze oder an der Grundlinie haben, sind ähnlich**; denn daraus folgt, daß alle andere Winkel gleich sind (§. 67. Num. 4.)

5) **Alle Quadrate sind ähnlich**; denn weil die Winkel rechte Winkel sind (§. 69), so sind die Quadrate gleichwinklichte Figuren (§. 11.) und

da

da alle Seiten gleich sind, so muß das Verhältniß, welches zwischen der Grundlinie des einen und der Grundlinie des andern Quadrats Statt findet, auch zwischen jedem andern Paar Seiten beyder Quadrate anzutreffen seyn (§. 48. 76. Arith.).

## §. 150.

Wenn zwey Dreyecke ABC und abc (Fig. 147.) ähnlich sind, so sind auch ihre Höhen CD und cd mit den Grundlinien AB und ab proportionirt, d. h. CD : AB = cd : ab.

Da A = a und D = d = 90° (§. 36), so ist △ ADC ∽ △ a dc (§. 149. Num. 1.) und CD : CA = cd : ca. Vermöge der Voraussetzung ist △ ABC ∽ △ abc und CA : AB = ca : ab (§. 148); also CD : AB = cd : ab (§. 91. Arith.)

## §. 151.

Wenn zwey Dreyecke ABC und DEF (Fig. 148.) gleichen Inhalts sind oder △ ABC = △ DEF, so verhalten sich ihre Grundlinien AB und DE verkehrt wie ihre Höhen CG und FH oder AB : DE = FH : CG.

△ ABC = AB . $\frac{1}{2}$ CG und △ DEF = DE . $\frac{1}{2}$ FH (§. 88. 91), also AB . $\frac{1}{2}$ CG = DE . $\frac{1}{2}$ FH und, wenn man diese Producte in eine Proportion auflöset, AB : DE = $\frac{1}{2}$ FH : $\frac{1}{2}$ CG (§. 79. Arith.) = FH : CG (§. 73. Num. 1. Arith.)

§. 152.

**Wenn zwey Dreyecke ABC und DEF (Fig. 149.) zwey proportionirte Seiten, AC : DF = CB : FE, und einen zwischen diesen Seiten liegenden gleichen Winkel, C = F, haben, so sind △ ABC und △ DEF ähnlich.**

Man lege F auf C und FD auf CA, so wird C von F bedeckt (§. 18.) und E fällt irgendwo auf CB, so daß △ DEF nun in CDE liegt. Vermöge der Voraussetzung ist AC : DF = CB : FE, aber DF = CD und FE = CE, also AC : CD = CB : CE (§. 76. Num. 1. Arith.) und die Linie DE schneidet die Seiten des Dreyecks in proportionirte Stücke und ist also mit AB parallel (§. 144), A = x, B = y (§. 60), aber x = D und y = E, also A = D und B = E. Die Dreyecke ABC und DEF haben also gleiche Winkel und proportionirte Seiten (§. 148.) und sind also ähnlich (§. 147).

§. 153.

**Wenn zwey Dreyecke ABC und DEF (Fig. 150.) proportionirte Seiten haben, so sind die Winkel, welche diesen Seiten gegenüberliegen, gleich und die Dreyecke ähnlich.**

An DE mache man einen Winkel y = A und q = B (§. 30), also die Dreyecke ABC und DEG gleichwinklicht (§. 67.) und AB : BC = DE : EG (§. 148),

aber

aber vermöge der Voraussetzung ist AB : BC = DE : EF, also DE : EG = DE : EF (§. 77. Arith.) und EG = EF (§. 76. Num. 2. Arith.). Ferner ist in den Dreyecken ABC und DEG AB : AC = DE : DG, aber AB : AC = DE : DF (Bedingung), also DE : DG = DE : DF und DG = DF.

Es ist also bewiesen worden, daß in den Dreyecken DEF und DEG ist EG = EF, DG = DF, DE = DE, also y = x, q = p und G = F (§. 67); aber y = A und q = B, also x = A und p = B; also sind die Dreyecke ABC und DEF gleichwinklicht und ähnlich (§. 147 und 148).

## §. 154.

**Eine Linie AB (Fig. 151.) in demselben Verhältniß zu theilen, als eine andere Linie CD getheilt ist.**

1) Auf CD errichte man ein gleichseitiges Dreyeck CDG (§. 54).

2) Man mache GH und GI = AB, und ziehe HI, so ist HI = AB.

3) Von G nach E und L ziehe man GE und GL, welche HI = AB in K und M auf die verlangte Weise schneiden.

**Beweis.** Da GH = GI = AB, so ist H = I (§. 39), aber G = 60°, also H = I = 60° und △ GHI gleichseitig und GH = GI = IH = AB (§. 67.

Num. 6.). Da ferner H = C = 60° (§. 67. Num. 5.), so ist HI parallel mit CD (§. 62), K = E, M = L (§. 60); also △ GHK ∽ △ GCE und GC : CE = GH : HK (§. 148.) oder CD : CE = AB : HK; eben so △ GDL ∽ △ GIM und GD : DL = GI : IM oder CD : DL = AB : IM.

**Anmerk.** Wenn die zu theilende Linie größer als die gegebene ist, so verlängert man GC und GD und macht Gh und Gi der zu theilenden Linie gleich. Ziehet man nun hi, so ist auch diese Linie so groß als diejenige, die getheilt werden soll, und wenn man GEk und GLm ziehet, so sind hk, km und mi die verlangten Theile.

§. 155.

**Eine gegebene gerade Linie AB (Fig. 152.) in gewisse gleiche Theile, z. B. in 5 zu theilen.**

1) Man ziehe eine Linie AC, welche mit AB einen beliebig großen Winkel BAC macht.

2) Man ziehe durch B eine Linie BD mit AC parallel (§. 65).

3) Mit einer beliebigen Zirkelöfnung nehme man auf AC 5 gleiche Theile: AF = FG = GH u. s. w.

4) Mit eben der Zirkelöfnung setze man 5 gleiche Theile auf BD ab: BK = KL = LM u. s. w.

5) Man ziehe FN; GM, HL u. s. w., so theilen diese die Linie AB in 5 gleiche Theile: Aa, ab, bc, cd, dB.

Be-

**Beweis.** Weil AF gleich groß und parallel mit DN, AG mit DM, AH mit DL u. s. w. ist, so müssen die Linien, welche diese gleich großen und parallelen Linien verbinden, gleich groß und parallel seyn (§. 63). Das △ ABC wird also von Parallellinien geschnitten, so daß AC : AF = AB : Aa ist (§. 141); aber vermöge der Construction ist AC : AF = 5 : 1, also AB : Aa = 5 : 1 (§. 77, Arith.) und Aa = $\frac{1}{5}$. AB (§. 98. Arith.). Ferner ist AC : AG = 5 : 2 = AB : Ab und Ab = $\frac{2}{5}$. AB und AC : AH = 5 : 3 = AB : Ac, also Ac = $\frac{3}{5}$. AB, u. s. w.

## §. 156.

Hierauf gründet sich die Einrichtung des **geometrischen Maaßstabes**, durch welchen eine gegebene gerade Linie AB, z. B. ein Zoll in 100 gleiche Theile, getheilt werden kann. Man theile die Linie AB in 10 gleiche Theile (§. 155). In A und B errichte man senkrechte Linien BI und AL von unbestimmter Länge. Mit einer beliebigen Zirkelöfnung setze man auf AL und BI zehn gleiche Theile: A 1, 1 — 2, 2 — 3, 3 — 4, 4 — 5, 5 — 6, 6 — 7, 7 — 8, 8 — 9, 9 — 10 und Bb = hd = df u. s. w. ab und ziehe die Linien b 1, d 2, f 3 u. s. w., welche gleich und parallel sind (§. 63.) und aus eben der Ursache ist L l = AB. Die Linien LI und AB werden ebenfalls in zehn gleiche Theile IK = Ko = op u. s. w.

$= B\,1$ getheilt. Man ziehe nun die Querlinien von K bis B, von o bis 1, von p bis 2, u. s. w., wodurch die gegebene Linie AB in 100 gleiche Theile getheilt wird, so daß $ab = \frac{1}{100}$ AB, $cd = \frac{2}{100}$ AB, $ef = \frac{3}{100}$ AB u. s. w. ist. Denn weil $\triangle$ KIB $\sim \triangle$ abB (§. 141), so ist IB : bB = KI : ab, aber BI = 10 Bb, also 10 Bb : bB = KI : ab = 10 : 1, nun ist $KI = B\,1 = \frac{1}{10}$ AB, also $\frac{1}{10}$ AB : ab = 10 : 1 oder 10 : 1 $= \frac{1}{10}$ AB : ab, also $ab = \frac{1}{100}$ AB (§. 98. Arith.). Eben so wird bewiesen, daß $cd = \frac{2}{100}$ AB, $ef = \frac{3}{100}$ AB u. s. w. ist.

Macht man nun AB = BC = CD = DE = einem Decimalzoll oder $\frac{1}{10}$ Fuß, ziehet die nöthigen senkrechten Linien CH, DG und EF und verlängert die Parallellinien 1 b, 2 d, 3 f u. s. w., so hat man einen geometrischen Maaßstab von 4 Zoll. Hiedurch kann der Fuß in 1000 Theile getheilt werden; denn $ab = \frac{1}{100}$ AB und AB $= \frac{1}{10}$ Fuß, also $ab = \frac{1}{1000}$ Fuß. Nimmt man AB $= \frac{1}{2}$ Decimalzoll, so erhält man $\frac{1}{2000}$ Theil des Fußes oder $ab = \frac{1}{1000}$ Fuß, und wenn AB $= \frac{1}{4}$ Decimalzoll, so ist $ab = \frac{1}{4000}$ Fuß. Feinere Theile kann man durch Transversalen oder Querlinien nicht erhalten, sondern man muß sich dazu des Nonius oder Verniers bedienen. Verfertigt man sich einen geometrischen Maaßstab nach dem Duodecimalmaaß, wodurch der Fuß in 12 sogenannte Werkzoll getheilt wird, der Zoll 12 Linien und diese wieder durch Trans-

ver-

versalen 10 Theile bekommt, so erhält man ab $= \frac{1}{1440}$ Fuß oder der Fuß wird dadurch in 1440 gleiche Theile getheilt. In der practischen Geometrie und Feldmeßkunst gebraucht man den geometrischen Decimalmaaßstab zur Construction der Zeichnungen, Entwerfung der Karten und deren Berechnung.

## §. 157.

**Wenn man in einem rechtwinklichten Dreyeck ABC (Fig. 154) von der Spitze des rechten Winkels C eine senkrechte Linie CD auf die Hypotenuse AB ziehet, so wird dasselbe dadurch in zwey andere rechtwinklichte Dreyecke ADC und BDC getheilt, welche unter sich und dem ganzen Dreyeck ABC ähnlich sind.**

In den Dreyecken ABC und BDC ist $D = n + y = R$ und $m = m$, also $x = y$ (§ 67. 149) und $\triangle ABC \sim \triangle BDC$ (§. 148). In den Dreyecken ABC und ADC ist $D = n + y$, $x = x$, also $m = n$ (§. 67.) und $\triangle ABC \sim \triangle ADC$ (§. 149. Num. 1.); also auch $\triangle ADC \sim \triangle BDC$.

## §. 158.

Hieraus folgt:

1) **Die senkrechte Linie CD (Fig. 154) ist die mittlere Proportionallinie zwischen den abgeschnittenen Stücken der Hypotenuse**

AD

AD und DB; denn △ ADC ∽ △ DBC; also AD : DC = DC : DB (§. 148).

2) Jede der Katheten ist die mittlere Proportionallinie zwischen der Hypotenuse und dem der Kathete zunächst liegenden Stück derselben; denn △ ABC ∽ △ ADC; folglich AB : AC = AC : AD und △ ABC ∽ △ BDC; folglich AB : BC = BC : BD (§. 148).

3) Wenn man von einem Puncte eines Halbkreises E (Fig. 155.) eine senkrechte Linie EB auf den Durchmesser AD herabfället, so ist sie die mittlere Proportionallinie zwischen den Theilen des Durchmessers AB und BD. Man ziehe AE und ED, so ist AED = R (§. 122. Num. 4.) und △ AED rechtwinklicht; also AB : BE = BE : BD (Num. 1.)

4) Die Chorde AE ist die mittlere Proportionallinie zwischen dem Durchmesser AD und dem Stücke AB, welches durch die senkrechte Linie aus E abgeschnitten wird; denn AD : AE = AE : AB (Num. 2.)

## §. 159.

Zu zwey gegebenen Linien M und N die mittlere Proportionallinie BE (Fig. 155) zu finden.

1) Man

1) Man ziehe eine gerade Linie, mache AB = M und BD = N.

2) Die Linie AD = M + N theile man in zwey gleiche Theile in C (§. 45).

3) Aus C beschreibe man einen Halbkreis und errichte in B eine senkrechte Linie BE (§. 43), so ist BE die mittlere Proportionallinie zwischen AB und BD (§. 158. Num. 3.) und also auch zwischen M und N.

**Anmerk.** Man ersiehet hieraus, wie ein Rechteck, dessen Seiten die gegebenen Linien sind, in ein gleich großes Quadrat verwandelt werden kann, dessen Seite BE seyn wird. Denn weil AB : BE = BE : BD, so ist auch AB. BD = $BE^2$. Soll aber ein Quadrat, dessen Seite = BE ist, in ein gleich großes Rechteck verwandelt werden, dessen eine Seite AB = M gegeben ist, so ziehe man eine gerade Linie AB = M, errichte im Endpuncte derselben eine senkrechte Linie = BE, ziehe AE und auf AE die senkrechte Linie ED, welche die verlängerte AB in D schneiden und dadurch die gesuchte andere Seite BD zum Rechteck AB. BD = $BE^2$ bestimmen wird.

## §. 160

Wenn zwey innerhalb eines Kreises gezogene Linien AB und DC (Fig. 156) einander in E durchkreuzen,

kreuzen, so sind die abgeschnittenen Stücke verkehrt proportionirt, AE : EC = ED : EB und die Rechtecke unter den abgeschnittenen Stücken gleich oder AE . EB = DE . EC.

Man ziehe AC und DB, so ist $p = \frac{1}{2}$ CB = m (§. 122) und $q = \frac{1}{2}$ AD = n; also △ ACE ∽ △ DBE und AE : EC = ED : EB (§. 148) und AE . EB = EC . ED (§. 78. Arith.)

§. 161.

Wenn man von einem Puncte E (Fig. 157) außerhalb eines Kreises zwey Linien EA und EB ziehet, welche beyde den Kreis schneiden, so sind die ganzen schneidenden Linien AE und EB im verkehrten Verhältniß mit den Stücken außerhalb des Kreises oder AE : EB = ED : EC und die Rechtecke aus den ganzen schneidenden Linien, und den Stücken außerhalb des Kreises sind gleich oder AE . EC = EB. ED.

Man ziehe AD und CB, so ist m = $\frac{1}{2}$ CD = n (§. 122.) und E = E, also △ AED ∽ △ BEC (§. 147) und AE : ED = BE : EC (§. 148) und AE : BE = ED : EC (§. 81. Arith.) und folglich auch AE . EC = EB . ED (§. 78. Arith.)

§. 162.

Wenn man von einem Puncte E (Fig. 158) außerhalb eines Kreises zwey gerade Linien ziehet,

het, deren eine AE den Kreis berühret, und die andere EB ihn schneidet, so ist die Tangente AE die mittlere Proportionallinie zwischen der ganzen schneidenden Linie BE und dem Stücke außerhalb des Kreises ED oder BE : EA = EA : ED und das Quadrat der Tangente AE ist so groß als das Rechteck aus BE und ED oder $AE^2 = EB . ED$.

Man ziehe AB und AD, so ist in den Dreyecken ABE und ADE der Winkel E = E und EAD = ABE (§. 126), also △ ABE ∽ △ ADE und BE : AE = AE : ED (§. 148), folglich auch $AE^2 = BE . ED$ (§. 78. Arith.)

## §. 163.

Wenn eine vierseitige Figur ABCD (Fig. 159.) in den Kreis beschrieben ist, so ist das Rechteck aus den beyden Diagonalen AC und BD der Summe der Rechtecke aus den gegenüberstehenden Seiten AB und CD, BC und AD gleich oder $AC . BD = BC . AD + AB . CD$.

An AD setze man einen Winkel y = x, so ist in den Dreyecken BCD und AED x = y und $m = \frac{1}{2}CD = n$ (§. 122); folglich △ BCD ∽ △ AED und BD : BC = AD : AE (§. 148), also $AE = \frac{BC . DA}{BD}$ (§. 98. Arith.). Ferner vermöge der Construction y = x, also wenn man r = r addirt, y + r = x + r oder

ADB

$ADB = CDE$ und $q = \frac{1}{2} AD = p$, also $\triangle ADB \sim \triangle CDE$ und $BD : AB = CD : EC$ und $EC = \frac{AB \cdot CD}{BD}$ (§. 98. Arith.). Nun ist $AC = AE + EC$ (§. 6. Grundſ. 1. Arith.) und folglich, wenn man ſtatt $AE$ und $EC$ die gefundenen Werthe ſetzt, $AC = \frac{BC \cdot AD}{BD} + \frac{AB \cdot CD}{BD}$ und wenn man auf beyden Seiten mit $BD$ multiplicirt, ſo iſt $AC \cdot BD = BC \cdot AD + AB \cdot CD$ (§. 37. Arith.).

## Achtes Kapitel.

### Von regulären Polygonen und vom Kreiſe.

§. 164.

**Reguläre Polygone** ſind geradlinichte ebene Figuren, deren Seiten ſo wie die zwiſchen gleichen Seiten liegenden Winkel gleich ſind.

**Irreguläre Polygone** haben ungleiche Seiten und Winkel.

Ein **reguläres Fünfeck** iſt ein reguläres Polygon mit fünf Seiten; ein **reguläres Sechseck** hat ſechs, ein **reguläres Siebeneck** ſieben gleiche Seiten und ſieben gleiche Winkel u. ſ. w.

Poly-

**Polygonwinkel** ABD (Fig. 160.) heißt jeder der gleich großen Winkel, welche zwey gleiche Seiten des Polygons AB und BD bilden.

**Centriwinkel** ACB (Fig. 160.) ist derjenige Winkel des in einen Kreis beschriebenen Polygons, der entsteht, wenn man zwey Linien aus dem Mittelpunct C nach den Ecken des Polygons A und B ziehet.

§. 165.

**Um jedes gegebene reguläre Polygon (Fig. 160.) läßt sich ein Kreis oder jedes reguläre Polygon läßt sich in einen Kreis beschreiben.**

Man theile alle Polygonwinkel A, B, D u. s. w. in zwey gleiche Theile (§. 42.) und da die ganzen Polygonwinkel gleich sind (§. 164), so müssen es auch ihre Hälften seyn oder $z = x = y = p = q = t$ u. s. w.

In den Dreyecken ABC und BDC ist $x = p$, $y = q$ und $AB = BD$, also $\triangle ABC = \triangle BDC$ und $AC = CD$ (§. 46), aber $x = y$, folglich $CA = CB$ (§. 55), ferner $p = q$ und also $CB = CD$ und $CA = CB = CD$. Auf eben die Art wird bewiesen, daß $\triangle DEC = \triangle EFC = \triangle FAC = \triangle ABC$ und also $CD = CE = CF = CA$ ist. C ist also der Mittelpunct und CA der Radius eines Kreises, welcher um das reguläre Polygon ABDEF beschrieben ist (§. 131.)

§. 166.

Aus dem beym vorigen Lehrsatze angeführten Beweise erhellet:

1) Ein reguläres in einen Kreis beschriebenes Polygon wird in so viele gleiche Dreyecke getheilt, als dasselbe Seiten hat.

2) Alle Centriwinkel sind gleich oder $m = r = s$ u. s. w. In einem Fünfeck ist jeder Centriwinkel $= \frac{360°}{5} = 72°$; in einem Sechseck $= \frac{360°}{6} = 60°$; in einem Siebeneck $= \frac{360°}{7} = 51° 25' 42\frac{6}{7}''$ u. s. w. und allgemein ist in einem n-eck der Centriwinkel $= \frac{360°}{n} = \frac{4R}{n}$.

3) Die Größe des Polygonwinkels findet man, wenn man den Centriwinkel von 180° abziehet; denn $ABD = y + p$, aber $x = y = p$, also $ABD = x + y$, nun ist $x + y + m = 180° = 2R$, also $ABD + m = 2R$ und $ABD = 2R - m = 2R - \frac{4R}{n}$.

4) Folgende Tafel enthält die Centri- und Polygonwinkel nebst der Summe der letztern bis zum Zwölfeck.

| Polygon. | Centriwinkel. | Polygonwinkel. | Summe der Polygonwinkel. |
|---|---|---|---|
| Fünfeck. | 72° 0′ 0″ | 108° 0′ 0″ | 540° |
| Sechseck. | 60° 0′ 0″ | 120° 0′ 0″ | 720° |
| Siebeneck. | 51° 25′ 42$\frac{6}{7}$″ | 128° 34′ 17$\frac{1}{7}$″ | 900° |
| Achteck. | 45° 0′ 0″ | 135° 0′ 0″ | 1080° |
| Neuneck. | 40° 0′ 0″ | 140° 0′ 0″ | 1260° |
| Zehneck. | 36° 0′ 0″ | 144° 0′ 0″ | 1440° |
| Eilfeck. | 32° 43′ 38$\frac{2}{11}$″ | 147° 16′ 21$\frac{9}{11}$″ | 1620° |
| Zwölfeck. | 30° 0′ 0″ | 150° 0′ 0″ | 1800° |

## §. 167.

**In jeden gegebenen Kreis läßt sich ein reguläres Polygon beschreiben (Fig. 160).**

Man theile den Umfang des Kreises in so viele gleiche Theile, als das Polygon Seiten haben soll, AB = BD = DE u. s. w. und ziehe die Chorden AB, BD, DE u. s. w., so wird ABDEF ein reguläres Polygon seyn. Man ziehe CA, CB, CD u. s. w., so werden, weil die Bogen gleich sind, auch die Chorden gleich seyn, AB = BD = DE u. s. w. (§. 106); überdies sind in den Dreyecken ABC, BDC u. s. w. die übrigen Seiten gleich, AC = CD, CB = CE u. s. w., also sind diese Dreyecke gleich (§. 41), und z = y, x = p, y = q, p = t u. s. w.; aber weil AC = BC = DC u. s. w., so sind die Dreyecke ABC, BDC u. s. w. gleichschenk-

licht und $u = z = x = y = p = q = t$ (§. 39), also $z + x = y + p = q + t$ u. s. w. Die Figur ABDEF hat also gleiche Seiten und gleiche Winkel und ist also ein reguläres Polygon (§. 164).

**Anmerk.** Wenn man auf einer gegebenen Linie AB (Fig. 160.) ein reguläres Polygon zeichnen will, z. B. ein Fünfeck, so setze man an A und B zwey gleiche Winkel $x = y$, die dem halben Polygonwinkel gleich sind (§. 166 Num. 4.) z. B. für das Fünfeck $= 54°$. Die Schenkel dieser Winkel verlängere man, bis sie sich in C schneiden, beschreibe mit dem Radius $AC = BC$ einen Kreis, und trage AB fünfmal auf demselben herum, wodurch sich die Ecken des Fünfecks D, E, F bestimmen. Will man in einem gegebenen Kreise ein reguläres Polygon zeichnen, so mache man am Mittelpuncte einen Winkel ACB dem Centriwinkel des Polygons gleich (§. 29); ziehe die Chorde AB und trage diese in der Peripherie des Kreises herum, um die übrigen Winkelspitzen des Polygons zu finden. Dies ist eine bloß mechanische Methode, welche desto unsicherer wird, je kleiner der Transporteur ist und je mehr Seiten das Polygon hat. Im Folgenden wird die geometrische Construction eines Polygons erklärt werden.

§. 168.

§. 168.

**In jedes reguläre Polygon ABDEF läßt sich ein Kreis GHIKL beschreiben (Fig. 161).**

Vom Mittelpuncte des Kreises C, der sich um das Polygon beschreiben läßt (§. 165), ziehe man auf die Polygonseiten AB, BD, DE u. s. w. die senkrechten Linien CG, CH, CI u. s. w., durch welche die Centriwinkel in zwey gleiche Theile $z = t = u = v$ getheilt werden (§. 58).

In den Dreyecken BGC, BHC, DHC, DIC u. s. w. ist

$$t = u = v = s \text{ u. s. w.}$$
$$y = p = q = r \text{ u. s. w. (§. 166)}$$
$$CB = CB = CD = CD \text{ (§. 165.)}$$

$$CG = CH = CH = CI \text{ u. s. w.}$$

Also sind CG, CH, CI u. s. w. Halbmesser eines Kreises, welcher die Seiten des Polygons berührt (§. 103) und also ist der Kreis GHIKL in das gegebene Polygon ABDEF beschrieben.

§. 169.

**Um einen Kreis GHIKL (Fig. 161.) ein reguläres Polygon ABDEF zu beschreiben.**

Man beschreibe in den Kreis ein Polygon von eben so vielen Seiten als das äußere Polygon haben soll. Durch die senkrechten Linien aus dem Mittelpuncte CG, CH, CI u. s. w. theile man die Seiten und Centri-

winkel des innern Polygons in zwey gleiche Theile (§. 58.) und ziehe AB, BD, DE u. s. w. senkrecht auf CG, CH, CI u. s. w., wodurch die Seiten des äußern Polygons bestimmt werden:

In den Dreyecken AGC, BGC, BHC, DHC u. s. w. ist

$$\begin{array}{rcccl} z & = & t & = & u = v \text{ u. s. w.} \\ G & = & G & = & H = H \\ CG & = & CG & = & CH = CH \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl} x & = & y & = & p = q \text{ u. s. w.} \\ AG & = & GB & = & BH = HD \text{ u. s. w.} \end{array}$$

Also $AG + GB = BH + HD$ oder $AB = BD$. Auf eben die Art wird bewiesen, daß die übrigen Seiten der äußern Figur gleich sind oder $BD = DE = EF$ u. s. w. Ferner wenn man die gleichen Winkel addirt, ist $m + x = y + p = q + r$ u. s. w. Also ist die um den Kreis beschriebene Figur ein reguläres Polygon (§. 164).

## §. 170.

**Die Seite eines regulären Sechsecks (Fig. 162.) ist dem Halbmesser des um selbiges beschriebenen Kreises gleich.**

Der Centriwinkel x ist $= \frac{4R}{6} = \frac{360°}{6} = 60°$ (§. 166), $AC = CB$, $z = y$ (§. 39.) und $z + y = 2y$, also $z + y + x = 180° = 2y + 60°$ und

180°

$180° - 60° = 120° = 2y$, also $\frac{120°}{2} = 60°$ $= y$, also auch $z = 60°$. Weil nun alle Winkel im $\triangle ABC = 60°$ sind, so ist dasselbe gleichseitig und $AB = AC = CB$ (§. 67. Num. 6.).

## §. 171.

**Eine Linie MN (Fig. 163.) nach stetiger Proportion schneiden**, heißt dieselbe dergestalt in Q theilen, daß das Rechteck aus der ganzen Linie und dem einen Stücke derselben NQ dem Quadrate des andern Stückes gleich ist oder $MN . NQ = MQ^2$ oder das eine Stück MQ ist die mittlere Proportionallinie zwischen der ganzen Linie und dem andern abgeschnittenen Stücke NQ.

## §. 172.

**Man soll eine gegebene Linie MN (Fig. 163.) nach stetiger Proportion schneiden.**

1) In N errichte man die senkrechte Linie $NC = \frac{1}{2} MN$.
2) Aus C mit dem Halbmesser $CN = \frac{1}{2} MN$ beschreibe man einen Kreis NRP.
3) Man ziehe MC und beschreibe mit dem Radius MP einen Bogen PQ, welcher die Linie MN in Q nach stetiger Proportion schneidet.

**Beweis.** Man verlängere MC bis R, so ist $MR : MN = MN : MP$ (§. 162.) und $MR = MN$;

MN = MN — MP : MP (§. 85. Arith.). Nun ist PC = CN = $\frac{1}{2}$ MN und 2 PC = PR = MN, ferner MR — MN = MR — PR = MP = MQ, also, wenn man diese Werthe in die vorige Proportion bringt, MQ : MN = QN : MQ, also $MQ^2 = MN \cdot QN$ (§. 78. Arith.) und die Linie MN ist also in Q nach stetiger Proportion geschnitten (§. 171).

## §. 173.

**Wenn der Radius AC eines Kreises (Fig. 164.) nach stetiger Proportion geschnitten wird, so ist der größere Theil CM die Seite eines regulären Zehnecks in demselben Kreise.**

Es sey AB die Seite eines regulären in den gegebenen Kreis beschriebenen Zehnecks. Man ziehe AC und CB, so ist ABC der halbe Polygonwinkel des Zehnecks = x + y = 72° (§. 166). Diesen theile man in zwey gleiche Theile durch die Linie BM (§. 42), so ist x = y = 36°, aber C auch = 36° (§. 166), also x = C und CM = BM (§. 55). Ferner z = C + x = 72° (§. 66.) = A. und folglich BM = BA (§. 55). In den Dreyecken ABC und ABM ist A = A und y = 36° = C, also $\triangle ABC \sim \triangle ABM$ (§. 148.) und AC : AB = AB : AM, aber AB = BM = CM, also AC : CM = CM : AM und $CM^2 = AC \cdot AM$ (§. 78. Arith.) Also ist CM der größere Theil des nach stetiger Proportion geschnittenen Halbmessers (§. 172.) und

es

es ist zugleich bewiesen, daß CM = AB oder gleich der Seite eines regulären Zehnecks ist (§. 166).

§. 174.

**Das Quadrat der Seite AB (Fig. 165.) eines in den Kreis beschriebenen regulären Fünfecks ist so groß als das Quadrat des Radius BC nebst dem Quadrate der Seite AF eines in denselben Kreis beschriebenen Zehnecks oder $BC^2 + AF^2 = AB^2$.**

Man theile den Bogen AF = 36° (§. 166.) in zwey gleiche Theile in G (§. 42.) und ziehe CG und MF, so ist AG = ACM = 18°. In den Dreyecken FbM und AbM ist Fb = bA (§. 57), bM = bM und b = b = R (§. 107), also FM = AM und MFA = MAF (§. 37). In den Dreyecken ABF und AFM ist MAF = MFA = ABF (weil AF = FB) (§. 39); also $\triangle ABF \sim \triangle AFM$ und AB : AF = AF : AM (§. 148.) und $AF^2 = AB \cdot AM$. Ferner ist der Winkel $ACB = \frac{360°}{5} = 72°$ (§. 166.) und die beyden andern Winkel ABC und BAC $= \frac{180° - 72°}{2} = \frac{108°}{2} = 54°$ (§. 67. Num. 4.) und im $\triangle MCB$ ist MBC = 54°, BCM = ACB − ACM = 72° − 18° = 54°; also $\triangle ABC \sim BCM$ und AB : BC = BC : BM und $BC^2 = AB \cdot BM$; aber vorhin ist bewie-

sen, daß $AF^2 = AB \cdot AM$, addire man also, so ist $BC^2 + AF^2 = AB \cdot BM + AB \cdot AM = AB \cdot (BM + AM) = AB \cdot AB = AB^2$.

§. 175.

**Die Seite eines Sechsecks, Fünfecks und Zehnecks zu finden, welche alle in Einen gegebenen Kreis beschrieben werden können (Fig. 166).**

1) Ziehe einen Durchmesser AB in dem gegebenen Kreise und errichte in C die senkrechte Linie CD (§. 43).

2) Man theile CB in zwey gleiche Theile in E (§. 45.) und beschreibe aus E mit dem Radius ED den Bogen GFD.

3) Man ziehe die Chorde DG, so ist AC die Seite des Sechsecks, DG des Fünfecks und CG des Zehnecks, welche sich alle in den gegebenen Kreis beschreiben lassen.

**Beweis.** Da AC der Radius des Kreises ist, so ist er die Seite des Sechsecks (§. 170). Aus E mit dem Radius CE beschreibe man einen Bogen CH und aus D mit dem Halbmesser DH den Bogen HI, so ist DI der größere Theil des nach stetiger Proportion in I geschnittenen Radius CD oder AC (§. 172); nun ist $DE = GE$ und $EH = CE$, also $DE - EH = EG - CE = DH = GC$, aber $DH = DI = CG$, also CG die Seite des Zehnecks (§. 173), nun ist $CD^2 + CG^2$

$CG^2 = DG^2$ (§. 93), also DG die Seite des Fünfecks (§. 174).

§. 176.

**Alle reguläre Polygone, welche gleich viele Seiten haben, sind ähnliche Figuren** (Fig. 167).

In allen Fünfecken ist der Polygonwinkel $= 108°$, in allen Sechsecken $= 120°$, in allen Achtecken $= 135°$ u. s. w., also sind alle Winkel gleich. Wenn man nun die Seite ab eines kleinern Polygons mit der Seite AB eines größern Polygons von eben so vielen Seiten vergleicht, so muß zwischen ihnen ein bestimmtes Verhältniß seyn, z. B. $1 : n$, also $1 : n = ab : AB$ (§. 73. Arith.); weil aber die Polygonseiten gleich sind (§. 164), so muß auch zwischen den übrigen Seiten dasselbe Verhältniß Statt finden. $AB : ab = BD : bd = DE : de = EF : ef = FA : fa = n : 1$. Also haben alle reguläre Polygone von gleich vielen Seiten gleiche Winkel und proportionirte Seiten und sind also ähnlich (§. 147).

§. 177.

**Alle Kreise sind ähnliche Figuren.** Der Bogen ist immer größer als die Chorde (§. 104); aber je mehr Seiten das Polygon hat, desto kleiner wird der Unterschied und man kann sich ein Polygon von so vielen Seiten in den Kreis beschrieben denken, daß der Unterschied zwischen der Polygonseite und dem Bogen

gen kleiner ist als jede angebliche endliche Größe. Aus diesem Grunde kann man einen größern Kreis als ein größeres Polygon von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten, und einen kleinern Kreis als ein kleineres Polygon von eben so vielen unendlich kleinen Seiten ansehen; aber alle Polygone von gleich vielen Seiten sind ähnlich (§. 176); also sind auch alle Kreise ähnlich.

Anmerk. Der Kreis enthält $360° = 360 . 60 = 21600' = 21600 . 60 = 1296000''$ und wenn man sich ein Polygon von 1296000 Seiten in den Kreis beschrieben denkt, so ist der Centriwinkel $= 1''$ und der Polygonwinkel $= 179° 59' 59''$ (§. 166.) und beyde Polygonseiten machen bis auf einen Winkel von $1''$ eine gerade Linie aus (§. 32), woraus man abnehmen kann, wie nahe Kreis und Polygon zusammenfallen müssen.

## §. 178.

**Wenn zwey Polygone ABCDE und abcde (Fig. 168.) ähnlich sind und man von den beyden gleichen Winkelspitzen D und d zu den gleichen Winkelspitzen A, B und a, b gerade Linien ziehet: so werden die Polygone dadurch in ähnliche Dreyecke zerlegt.**

$E = e$ und $AE : ED = ae : ed$ (Bedingung), also $\triangle AED \sim \triangle aed$, $m = p$ und $AE : AD =$

ae

ae : ad (§. 152), aber AE : AB = ae : ab, alſo AB : AD = ab : ad (§. 91. Arith.); ferner m + n = p + q und wenn man m = p ſubtrahirt, n = q; alſo △ ABD ∽ △ abd, x = z und AB : BD = ab : bd (§. 152), aber BC : AB = bc : ab (Bedingung), alſo BC : BD = bc : bd, ferner x + y = z + u, alſo y = u und △ BCD ∽ △ bcd.

## §. 179.

**Wenn zwey Polygone ABCDE und abcde (Fig. 168.) aus ähnlichen Dreyecken beſtehen, △ AED ∽ △ aed, △ ABD ∽ △ abd, △ BCD ∽ △ bcd, ſo ſind die Polygone ſelbſt ähnlich, d. h. ſie haben gleiche Winkel und proportionirte Seiten.**

E = e und C = c. Ferner m = p, n = q, alſo m + n = p + q, eben ſo x = z und y = u, alſo x + y = z + u, endlich r = i, s = o, t = v, alſo r + s + t = i + o + v oder alle Polygonwinkel gleich. Nun iſt auch

AE : AD = ae : ad
AD : AB = ad : ab } vermöge der Vorausſetzung

AE : AB = ae : ab (§. 91. Arith.)

Ferner AB : BD = ab : bd
BD : BC = bd : bc } Vorausſetzung

AB : BC = ab : bc.

Daß

Daß AE : ED = ae : ed und BC : CD = bc : cd ist, erhellet daraus, daß es ähnlich liegende Seiten in ähnlichen Dreyecken sind. Endlich

ED : AD = ed : ad
AD : DB = ad : db } Voraussetzung
DB : DC = db : dc

ED : DC = ed : dc (§. 91. Arith.)

Es ist also bewiesen, daß die beyden Polygone gleiche Polygonwinkel haben und diese Polygonwinkel von proportionirten Seiten eingeschlossen sind; also sind die Polygone ABCDE und abcde ähnlich (§. 147).

§. 180.

**Die Perimeter ähnlicher Polygone ABCDE und abcde (Fig. 168) d. h. die Summen ihrer Seiten verhalten sich wie ein Paar ähnlich liegende Seiten = AB : ab.**

Da vermöge der Voraussetzung die Polygone ähnlich sind, also proportionirte Seiten und gleiche Winkel haben (§. 147), so ist AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = EA : ea; also auch AB + BC + CD + DE + EA : ab + bc + cd + de + ea = AB : ab (§. 86. Arith.) oder der Umfang des Polygons ABCDE : Umfang des Polygons abcde = AB : ab.

§. 181.

Hieraus lassen sich folgende Schlüsse herleiten:

1)

1) **Wenn reguläre Polygone von gleich vielen Seiten in Kreise beschrieben sind, so verhalten sich ihre Perimeter wie die Radien** AC : ac (Fig. 167) **oder wie die Höhen der Dreyecke** CG : cg; denn AB + BD + DE + EF + FA : ab + bd + de + ef + fa = AB : ab (§. 180.) = AC : ac = CG : cg (§. 150.).

2) Wenn man die Peripherien zweyer Kreise P, p, ihre Radien R, r und ihre Durchmesser D, d nennt, so ist P : p = R : r (§. 177. 181.) = 2 R : 2 r = D : d **oder die Peripherien zweyer Kreise verhalten sich wie die Radien oder Durchmesser.**

3) Aehnliche Kreisbogen heißen solche, die gleich viele Grade enthalten oder gleiche Theile der Peripherien ihrer Kreise ausmachen; so sind $\frac{P}{n}$, $\frac{p}{n}$ ähnliche Bogen. Weil nun $\frac{P}{n} : \frac{p}{n} = P : p$ (§. 74. Arith.) = R : r, so **verhalten sich ähnliche Bogen wie ihre Halbmesser.**

## §. 182.

**Der Inhalt eines regulären Polygons** ABDEFG (Fig. 169.) **ist dem Inhalte eines Dreyecks** gCg **gleich, dessen Grundlinie** gg **so groß ist, als der Perimeter des Polygons und dessen Höhe die**

die senkrechte Linie CH von dem Mittelpuncte C des umschriebenen Kreises auf eine der Polygonseiten AB ist.

Das Polygon läßt sich in gleiche Dreyecke ABC, BDC u. s. w. zerlegen, deren Grundlinien AB = BD u. s. w. und Höhen gleich sind (§. 165.). Man verlängere eine der Seiten AB, mache Ag = AG, Bd = BD, de = DE, ef = EF, fg = FG und ziehe die Linien Cg, Cd, Ce, Cf, Cg, so ist △ AgC = △ AGC, △ BdC = △ BDC, △ deC = △ DEC, △ eCf = △ ECF, △ fCg = △ FCG (§. 89.), also, wenn man addirt, △ gAC + △ ABC + △ BCd + △ deC + △ eCf + △ fg = △ ggC = △ GAC + △ ABC + △ BDC + △ DEC + △ ECF + △ FCG = Polygon ABDEFG. Aber die Grundlinie von △ ggC = gg = GA + AB + BD + DE + EF + FG und die Höhe desselben = GH; also Polygon ABDEFG = △ ggC.

## §. 183.

Den Inhalt eines regulären Polygons zu finden, wenn die Polygonseite AB (Fig. 169) und die Höhe CH eines der Dreyecke ABC gegeben sind.

1) Man multiplicire die gegebene Polygonseite AB mit der Anzahl der Seiten = n, so ist n . AB der Perimeter des Polygons = gg (§. 182.).

2)

2) Dieſen multipliſcire man mit der halben Höhe CH, ſo hat man den Inhalt des Polygons ABDEFG = △ ggC = gg. ½ CH = n AB. ½ CH (§. 91.) Z. B. in einem Fünfeck ſey AB (Fig. 167) = 15′, ſo iſt der Perimeter 5. 15 = 75′; die Höhe CG = 10, 32′, ſo iſt der Inhalt des Polygons ABDEF = 75 . $\frac{10,32}{2}$ = 75 . 5, 16′ = 387 Quadratfuß.

§. 184.

Wenn man den Inhalt eines irregulären Polygons ABCDE (Fig. 168.) berechnen will, ſo theilet man daſſelbe dadurch in Dreyecke, daß man von einer Winkelſpitze D zu den andern A und B gerade Linien oder Diagonale ziehet.

Man berechnet nun den Inhalt eines jeden Dreyecks beſonders und addirt dieſe Inhalte. Zur Abkürzung der Rechnung kann man zwey Dreyecke, welche eine und dieſelbe Grundlinie haben, z. B. ADE und ADB zuſammennehmen und als ein Trapezium berechnen, indem man die gemeinſchaftliche Grundlinie mit der halben Summe der Höhen der Dreyecke multiplicirt (§. 92.).

§. 185.

Der Kreis iſt einem Dreyeck ABC (Fig. 170.) gleich, deſſen Grundlinie AB der Peripherie des Kreiſes und deſſen Höhe dem Halbmeſſer des Kreiſes AC gleich iſt.

Man stelle sich vor, daß in den Kreis ein Polygon von so vielen Seiten beschrieben wäre, daß der Unterschied zwischen dem Bogen und der Polygonseite kleiner als jede endliche Größe ist, so wird kein beträchtlicher Unterschied zwischen dem Perimeter des unendlich vielseitigen Polygons und der Peripherie des Kreises (§. 177) Statt finden. Wenn ferner der Centriwinkel ACB (Fig. 169) sehr klein etwa $= 1°$ ist, so wird ebenfalls wenig oder gar kein Unterschied zwischen der Höhe CH und dem Halbmesser CA seyn. Ein unendlich vielseitiges Polygon oder ohne merklichen Fehler ein Kreis wird also einem Dreyeck ABC (Fig. 170) gleich seyn, dessen Grundlinie der Peripherie des Kreises und dessen Höhe dem Radius desselben gleich ist (§. 182).

## §. 186.

**Ein Kreisausschnitt oder ein Sector ADC (Fig. 171) ist einem Dreyeck ABC gleich, dessen Grundlinie dem Bogen CD und dessen Höhe dem Radius AC gleich ist.**

Man nehme zwey oder mehrere Polygondreyecke z. B. ABC und BDC (Fig. 169) zusammen, so hat man den Sector ABDC des regulären Polygons ABDEFG. Mache man nun $Bd = BD$, so ist $ABDC = \triangle ABC + \triangle BDC = \triangle ABC + \triangle BdC = \triangle AdC = Ad \cdot \frac{1}{2} CH = (AB + BD) \frac{1}{2} CH$ oder man findet den Sector, wenn man den Perimeter desselben $AB + BD$ mit

mit der halben Höhe CH multiplicirt. Geht man nun zum Sector ACD eines Kreises über, so verwandelt sich AB + BD in den Bogen CD und die Höhe CH in den Radius AC (§. 177. 185.); also ist der Sector ACD = Bog. CD $\frac{1}{2}$ AC = △ ABC.

**Anmerk.** Man ersieht hieraus, daß es zur Berechnung des Kreises und des Sectors nöthig ist, die Länge der Peripherie oder eines Bogens CD nach dem Fußmaaße finden oder eine gerade Linie ziehen zu können, welche so groß ist als die Peripherie des Kreises, welches sie rectificiren heißt. Alle Kreise sind ähnliche Figuren und es gibt ein beständiges Verhältniß zwischen dem Durchmesser und dem Umfange derselben (§. 181. Num. 2.) und dieses Verhältniß ist es, welches wir jetzt finden wollen.

## §. 187.

**Wenn die Seite AB (Fig. 172) eines in den Kreis beschriebenen regulären Polygons nebst dem Radius des Kreises AC gegeben ist, die Höhe eines der Dreyecke CG zu finden, in welche das Polygon aus dem Mittelpunkte C zerlegt werden kann.**

Die senkrechte Linie CG aus dem Mittelpuncte C theilt die Chorde AB in zwey gleiche Theile (§ 168), also AG = GB = $\frac{1}{2}$ AB, also $AG^2 = \frac{1}{4} AB^2$ (§. 85).

Nun ist $AC^2 = AG^2 + CG^2$ (§. 93), also $AC^2 = \frac{1}{4} AB^2 + CG^2$, und, wenn man $\frac{1}{4} AB^2$ subtrahirt, $AC^2 - \frac{1}{4} AB^2 = CG^2$ (§. 6 Grundf. 4 Arith.) und $\sqrt{(AC^2 - \frac{1}{4} AB^2)} = CG$ (§. 72.) z. B. eines Sechsecks. Nimmt man nun $AC = 1$ an, so ist $CG = \sqrt{(1 - \frac{1}{4})} = \sqrt{(\frac{4}{4} - \frac{1}{4})} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$ (60. Arith.) $= \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1,7320508}{2}$ $= 0,8660254$.

## §. 188.

**Wenn die Seite AB (Fig. 172.) eines in den Kreis beschriebenen Polygons nebst dem Radius des Kreises AC = CH bekannt ist, die Seite KL eines um den Kreis beschriebenen Polygons zu finden.**

Da $\triangle ABC \sim \triangle KLC$ (§. 166.), so ist $CG : CH = AB : KL$ (§. 150.), also $KL = \frac{CH \cdot AB}{CG}$ (§. 98. Arith.) $= AB \cdot \frac{CH}{CG}$ (§. 45. Arith.), oder man findet die Seite des äußern Polygons, wenn man die Seite des innern Polygons AB mit $\frac{CH}{CG}$ oder dem Verhältnisse des Radius zur Höhe des innern Polygons multiplicirt. Z. B. beym Sechseck ist $CH = AB = 1$, $CG = 0,866$ (§. 187.), also $KL = 1,154$.

§. 189.

## §. 189.

**Wenn die Seite eines in den Kreis beschriebenen Polygons AB (Fig. 172) nebst dem Radius AC = CH gegeben ist, die Seite eines Polygons von doppelt so vielen Seiten, welches in denselben Kreis beschrieben werden kann, oder AH zu finden.**

$CG = \sqrt{(AC^2 - \frac{1}{4}AB^2)}$ (§. 187), nun ist $HG = CH - CG = CH - \sqrt{(AC^2 - \frac{1}{4}AB^2)}$, ferner $AH^2 = EH \cdot HG$ (§. 158. Num. 3.) $= 2\,AC \cdot HG$ und wenn man den vorhin gefundenen Werth von HG gebraucht, so ist

$AH^2 = 2\,AC \cdot (AC - \sqrt{(AC^2 - \frac{1}{4}AB^2)})$, also

$AH = \sqrt{(2\,AC \cdot (AC - \sqrt{(AC^2 - \frac{1}{4}AB^2)}))}$

Es sey z. B. in einem Sechseck $AB = 1$ und $AC = 1$ (§. 170), so ist die Seite des Zwölfecks $AH = \sqrt{(2 \cdot (1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}))} = \sqrt{(2 - \frac{2}{4}\sqrt{3})} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})} = 0{,}51\,76$.

## §. 190.

**Durch Näherung oder Approximation das Verhältniß zwischen dem Durchmesser und der Peripherie des Kreises zu finden (Fig. 172).**

Man stelle sich ein Polygon in den Kreis und ein zweytes von eben so vielen Seiten um den Kreis beschrieben vor, so ist jeder Kreisbogen, dessen Chorde eine Seite des in den Kreis beschriebenen Polygons ist,

größer als die Seite des in den Kreis und kleiner als die Seite des um den Kreis beschriebenen Polygons. Daß der Bogen AHB > AB ist, ist schon vorhin bewiesen (§. 104). Ferner ist das geradlinichte Dreyeck KLC ein Ganzes, wovon der Sector CAHB nur ein Theil ist; also Sector CAHB < △ KLC (§. 6. Grundf. 1. Arith.), folglich AHB . ½ CH (§. 186.) < KL . ½ CH, und wenn man auf beyden Seiten mit 2 multiplicirt und durch CH dividirt, so ist Bogen AHB < KL. Man fange damit an, daß man in den Kreis ein Sechseck (§. 167.) beschreibt, dessen Seite = Radius = 1 ist (§. 170); um den Kreis beschreibe man gleichfalls ein Sechseck (§. 169), dessen Seite berechnet werden muß (§. 188). Ferner beschreibe man in den Kreis ein Zwölfeck und berechne dessen Seite (§. 189.) und um den Kreis ebenfalls ein Zwölfeck, dessen Seite berechnet wird (§. 188) und so fahre man nach folgender Proportion 6, 12, 24, 48, 96, 192 u. s. w. bis zum 393210 Eck.

So hat Nicole (Memoires de l'Academie des sciences de Paris 1747. Part. 2. p. 644-653. der holländischen Ausgabe) die Seiten der in den Kreis und um den Kreis beschriebenen Polygone bis zum 393210 Eck berechnet und gefunden, daß wenn man die Seite des letzten Polygons mit 393210 multiplicirt und den Halbmesser = 1 setzt,

der

der Perimeter des in den Kreis beschriebenen

393210 Ecks = 6,283185307031961 6

und der Perimeter des um den Kreis beschriebenen

393210 Ecks = 6,283185307267891 2 ist.

Man ersieht hieraus, daß bis auf 9 Decimalstellen es keinen Unterschied zwischen dem Perimeter des innern und äußern Polygons gibt und daß sich also der Radius des Kreises zu seiner Peripherie verhält = 1 : 6,283185307 oder der Durchmesser zur Peripherie 1 : 3,141592653, welches Verhältniß so genau ist, daß man nicht $\frac{1}{10000000000}$ fehlt.

**Anmerk.** Archimedes hat aus der berechneten Seite des in und um den Kreis beschriebenen 96 Ecks das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie beynahe wie 7 : 22 oder = 1 : 3,14 gefunden. (Archimedis Dimensio circuli cum Eutocii Comment. in Wallisii oper. math. Vol. III. Oxon. 1699. p. 539-563.) In Eutocii Commentar wird ausdrücklich gesagt, daß andere griechische Mathematiker genauere Verhältnisse als das Archimedische berechnet hätten (Wallisius l. c. p. 559). Vieta hat das Verhältniß = 1 : 3,141592653 (Vietae oper. math. Leid. 1646. p. 400.) gefunden. Ludolph von Ceulen oder von Cöln ging noch weiter und berechnete die Peripherie = 3,14159265358979323846264338327950288 oder bis auf 35 Decimalstellen, Radius = 1

angenommen. (Lud. a Ceulen de circulo et adscriptis. Leid. 1619.) Scharp berechnete den Umfang des Kreises auf 61 (Geometry improued by A. Sharp. London 1717. p. 35.) und Lagny bis auf 127 Decimalstellen (Memoires de l'Acad. des sciences de Paris 1719. p. 188). In kleinern Zahlen ist kein Verhältniß genauer als das des Adrian Metius, der das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie = 113 : 355 angab, welches bis auf sechs Decimalen genau und = 1 : 3,141592 ist. Man hat also das Verhältniß des Durchmessers zum Umfange bis zu einem Grade der Genauigkeit berechnet, daß der bey der Berechnung mögliche Fehler unbedeutend ist und bey weiten die Genauigkeit übertrifft, mit der man im Stande ist, den Durchmesser zu messen; aber dennoch geht der Richtigkeit des Verhältnisses noch etwas ab Sollte das Verhältniß irrational seyn, so läßt sich dasselbe gar nicht in endlichen Zahlen ausdrücken und bestimmen. (Hanou de impossibilitate quadraturae circuli.)

Die hier erklärte Methode, das Verhältniß des Durchmessers zum Umfange zu berechnen, ist sehr weitläuftig, auch hat man da zu viele andere Methoden, die sich hier aber nicht erklären lassen. Man kann hierüber L. Eulers Abhandlung: de variis methodis quadraturam proxime exprimendi (Comment.

ment. Petropol. ad annum 1737. Tom. 9.) nachlesen. Mit dem griechischen Buchstaben $\pi$ bezeichnen wir im Folgenden die Peripherie des Kreises, wenn der Durchmesser $= 1$ angenommen ist; also $\pi = 3,14159265358979323$ und $\frac{1}{\pi} = \frac{1}{3,1415926} \ldots = 0,318309886183790671537776 \ldots$.

§. 191.

**Es ist der Durchmesser eines Kreises $= d$ gegeben; man soll dessen Peripherie $= p$ finden.**

Man multiplicire den gegebenen Durchmesser $= d$ mit $\pi$, so ist $p = \pi . d$. Es sey $d = 8'$, so ist $p = 3,141592 . 8 = 25,132736'$.

**Beweis.** Alle Kreise sind ähnliche Figuren (§. 177.) und so wie sich des einen Kreises Durchmesser $= 1$ zu seiner Peripherie $= 3,141592 = \pi$ verhält, so verhält sich auch des gegebenen Kreises Durchmesser $d$ zu seiner Peripherie $p$ (§. 181.) oder $1 : \pi = d : p$, also $p = \pi . d$ (§. 98. Arith.).

§. 192.

**Die Peripherie eines Kreises $= p$ ist gegeben; man soll dessen Durchmesser $= d$ finden.**

Man dividire $p$ durch $\pi = 3,141592 \ldots$ oder multiplicire $p$ mit $\frac{1}{\pi} = 0,318309 \ldots$, so hat man den Durchmesser. Es sey $p = 5'$, so ist $d = 0,318309 . 5 = 1,591545'$.

Beweis. $p = \pi . d$ (§. 191); man dividire auf beyden Seiten durch $\pi$, so ist $\frac{p}{\pi} = \frac{p}{3,14159...} = d$; aber $\frac{p}{\pi} = p . \frac{1}{\pi}$ (§. 43. Arith.), also $d = p . \frac{1}{\pi} = 0,318309 . p$.

§. 193.

Es ist die Anzahl der Grade, welche ein Kreisbogen enthält, $= n$ nebst dem Durchmesser des Kreises $= d$ gegeben; man soll die Länge dieses Bogens $= x$ finden.

1) Aus dem gegebenen Durchmesser berechne man die Peripherie (§. 191).

2) Man setze folgende Proportion auf: $360° : n° = \pi . d : x$; also $x = \frac{n . \pi . d}{360°}$ (§. 98. Arith.). Es sey $n = 30°$, $d = 12'$, so ist $x = \frac{30 . 12 . 3,14159...}{360°} = \frac{1130,9724}{360°} = 3,141'$.

§. 194.

Es ist die Länge eines Kreisbogens $= b$ nebst dem Durchmesser des Kreises $= d$ gegeben; man verlangt die Anzahl der Grade $= y$ zu wissen, die dieser Bogen enthält.

Aus dem Durchmesser berechne man die Peripherie $= \pi . d$ (§. 191), so ist $\pi d : b = 360° : y$ und $y = \frac{b . 360°}{\pi . d}$.

§. 195.

## §. 195.

**Aus dem gegebenen Durchmesser eines Kreises den Flächeninhalt desselben zu berechnen.**

### Erste Methode.

1) Aus dem gegebenen Durchmesser berechne man die Peripherie (§. 191).

2) Diese multiplicire man mit dem vierten Theil des Durchmessers, so hat man den Inhalt des Kreises. Es sey der Durchmesser $= 8'$, so ist die Peripherie $= 25,132736'$ und der Inhalt $= 25,132736 . \frac{8}{4} = 25,132736 . 2 = 50,265472$ Quadratfuß.

**Beweis.** Der Kreis ist einem Dreyeck gleich, dessen Grundlinie AB (Fig. 170.) $= \pi . d$ (§. 191.) und dessen Höhe $AC = \frac{1}{2} d$ ist; nun ist aber $\triangle ABC = AB . \frac{1}{2} AC$, also der Kreis $= \pi . d . \frac{1}{4} d$.

### Zweyte Methode.

Man quadrire den gegebenen Durchmesser und multiplicire dies Quadrat mit 0,7854 ..... Der Durchmesser sey $= 8'$, so ist der Inhalt des Kreises $= 64 . 0,7854 = 50,2656$ Quadratfuß.

**Beweis.** Bey der ersten Auflösung ist bewiesen, daß der Inhalt des Kreises $= \pi . d . \frac{1}{4} d = \frac{\pi d^2}{4}$ ist, aber $\frac{\pi}{4} = \frac{3,141592}{4} = 0,785398 = 0,7854$ (§. 55. Arith.), also der Inhalt des Kreises $= 0,7854 . d^2$.

§. 196.

§. 196.

**Aus dem gegebenen Halbmesser eines Kreises = r den Inhalt desselben zu finden.**

Erste Methode. Man suche die Peripherie und multiplicire diese mit dem halben Radius, so hat man den Inhalt des Kreises (§. 195. erste Meth.).

Zweyte Methode. Man multiplicire das Quadrat des Radius mit 3,141592, so ist das Product dem Inhalte des Kreises gleich.

Beweis. Es ist bewiesen, daß der Inhalt des Kreises $= \pi d \cdot \frac{1}{4} d = \frac{\pi d^2}{4}$ ist; nun ist aber $\frac{d}{2} = r$ (§. 14.) und $\frac{d^2}{4} = r^2$ (§. 60. Arith.), also der Inhalt des Kreises $= \frac{\pi d^2}{4} = \pi r^2 = 3{,}141592 \cdot r^2$. Es sey $r = 2$, so ist der Inhalt $= 3{,}141592 \cdot 4 =$ 12,566368 Quadratfuß.

§. 197.

**Aus der gegebenen Peripherie eines Kreises = p den Inhalt desselben zu finden.**

Erste Methode. Aus der Peripherie berechne man den Durchmesser (§. 192.) und multiplicire den vierten Theil desselben mit p (§. 195).

Zweyte Methode. Man multiplicire das Quadrat der gegebenen Peripherie $= p^2$ mit 0,079577, so ist das Product dem Inhalte des Kreises gleich. Es

sey

sey z. B. die Peripherie eines Kreises $= p = 10'$, so ist der Inhalt $= 100 \cdot 0{,}079577 = 7{,}9577$ Quadratfuß.

**Beweis.** Der Inhalt des Kreises $= \frac{pd}{4}$ (§. 195.) und $d = 0{,}318309 \cdot p$ (§. 192); also der Inhalt des Kreises $= \frac{0{,}318309 \cdot p^2}{4} = 0{,}079577 \cdot p^2$.

**Anmerk.** Den Inhalt des Kreises zu finden, ist die bekannte Aufgabe der Quadratur des Cirkels. Mit der vollkommensten geometrischen Genauigkeit hat man diese Aufgabe noch nicht auflösen können. Wenn man indeß das Verhältniß des Durchmessers zum Umfang in vielen Decimalstellen nimmt (§. 190), so erhält man alle Genauigkeit, welche in der Ausübung nöthig ist. Unwissende in der Geometrie haben nur zu oft geglaubt, die Auflösung dieser Aufgabe gefunden zu haben. In allen Sprachen besitzen wir verunglückte Versuche der Quadratur des Kreises. In dänischer Sprache haben wir doch nur zwey, einen von einem Schiffsbaumeister Erichsen und einen zweyten von einem Kücheninspector Makholt, welcher letztere eine Sprache schreibt, die keinem Geometer verständlich ist.

§. 198.

§. 198.

Wenn der Inhalt eines Kreises = a gegeben ist, so findet man die Größe des Durchmessers = d, wenn man a mit 1,273239544 . . .; die Größe des Radius, wenn man a mit 0,3183098; die Länge der Peripherie = p, wenn man a mit 12,566370614 multiplicirt und in allen Fällen aus dem Producte die Quadratwurzel ziehet.

1) $\frac{\pi . d^2}{4} = a$ (§. 196. Num. 2.), $\pi . d^2 = 4a$ und $d^2 = \frac{4a}{\pi} = \frac{4}{\pi} . a$ (§. 43. Arith.); aber $\frac{1}{\pi} = 0{,}318309886$ (§. 190.) und $\frac{4}{\pi} = 1{,}273239544$, also $d^2 = 1{,}273239544 . a$. und $d = \sqrt{(1{,}273239544 . a)}$.

2) $\pi r^2 = a$ (§. 196. Num. 2.) und $r^2 = \frac{a}{\pi} = \frac{1}{\pi} . a$; aber $\frac{1}{\pi} = 0{,}318309886$, also $r^2 = 0{,}318309886 . a$ und $r = \sqrt{(0{,}318309886 . a)}$.

3) $\frac{pd}{4} = a$ (§. 195. Num. 1.), aber $d = \frac{p}{\pi}$ (§. 192.) und wenn man diesen Werth für d setzt, ist $\frac{p^2}{4\pi} = a$ und $p^2 = 4\pi a$, aber $4\pi = 4 . 3{,}14159265\overline{3589}$ ——— (§. 190.) =

12,

12,566370614356, also $p^2 = 12,566370614356 \cdot a$ und $p = \sqrt{(12,566370614356 \cdot a)}$.

§. 199.

Den Inhalt eines Kreisausschnitts oder Sectors ACD (Fig. 171) zu berechnen, wenn der Halbmesser des Kreises AC $= r$ und die Größe n des Bogens CD in Graden $= n$ gegeben sind.

1) Man suche die Länge des Bogens CD $= \frac{nd\pi}{360}$ (§. 193.) $= \frac{2nr\pi}{360}$ (weil $d = 2r$) $= \frac{nr\pi}{180}$.

2) Weil nun der Sector einem Dreyeck gleich ist, dessen Grundlinie dem Bogen $= \frac{nr\pi}{180}$ und dessen Höhe dem Radius $= r$ gleich ist (§. 186.), so ist der Sector ADC $= \frac{nr\pi}{180} \cdot \frac{1}{2} r = \frac{nr^2\pi}{360}$;

aber $\frac{\pi}{360} = \frac{3,141592653}{360} = 0,008726646$,

so ist ADC $= 0,008726646\, nr^2$. Es sey AC $= r = 6'$, DC $= n^\circ = 60^\circ$, so ist ADC $= \frac{60 \cdot 36 \cdot 3,141}{360} = \frac{36 \cdot 3,141}{6} = 6 \cdot 3,141$ $= 18,846$ Quadratfuß.

Anmerk. Weil $r^2\pi = a =$ dem Inhalt eines Kreises ist, dessen Halbmesser $= r$ ist (§. 196),

so

so ist der Sector $= \frac{n \cdot a}{360}$; oder ist der Inhalt des Kreises bekannt, so hat man nur nöthig, diesen mit der Anzahl der Grade auf dem Bogen CD zu multiplicíren und durch 360 zu dividiren. Hieraus folgt ferner, daß $360° : n° = a : ADC$ oder wie die ganze Peripherie sich zum Bogen des Sectors verhält, so verhält sich des Kreises Inhalt zum Inhalt des Sectors, welches sonst daraus hergeleitet wird, daß Figuren bey gleichen Höhen sich wie ihre Grundlinien verhalten (§. 140).

§. 200.

**Wenn in einem Kreisabschnitt oder Segment AED (Fig. 173.) der Bogen AED, die Chorde AD und der Radius AC bekannt sind, so kann man den Inhalt des Segments finden.**

1) In dem rechtwinklichten Dreyeck ABC suche man die Höhe $CB = \sqrt{(AC^2 - \frac{1}{4} AD^2)}$ (§. 187).

2) Man berechne den Inhalt des Sectors AEDC (§. 199.) und des Dreyecks ADC.

3) Das Segment AED ist $=$ AEDC $-$ $\triangle$ ADC. Es sey z. B. $AC = 54'$, der Bogen $AED = 48° 20' = 48\frac{1}{3}°$, Chorde $AD = 44'$, so ist $CB = \sqrt{(54^2 - 22^2)} = \sqrt{(2916 - 484)} = \sqrt{2432} = 49,3'$. Ferner $\triangle ACD = CB \cdot \frac{1}{2} AD = 49,3 \cdot 22 = 1084,6$ Quadratfuß. Der

Sector

Sector AEDC = 0,008726 . $54^2$ . $48\frac{1}{3}$ (§. 199. 2.) = 0,008726 . 2916 . $48\frac{1}{3}$ = 25,445 . $48\frac{1}{3}$ = 1229,641 Quadratfuß; also das Segment AED = Sector AEDC — △ ACD = 1229,641 — 1084,6 = 145,041 Quadratfuß.

§. 201.

**Wenn in einem Segmente AED (Fig. 173.) die Chorde AD, der Bogen AED und die Höhe des Segments BE gegeben sind, so kann man den Inhalt des Segments berechnen.**

1) Man suche den Radius des Kreises, zu welchem das Segment gehört, nämlich EB : AB = AB : BF (§. 158.) und $BF = \frac{AB^2}{EB}$ (§. 97. Arith.), also $AC = CE = \frac{EB + BF}{2}$ und CB = CE — EB.

2) Man berechne nun den Inhalt des Sectors AEDC (§. 199.) und subtrahire davon den Inhalt des Dreyecks ADC, so ist der Unterschied der Inhalt des Segments AED. Es sey AED = 60°, AD = 60′, BE = 8′, so ist 8 : 30 = 30 : BF, $BF = \frac{900}{8} = 112,5'$; folglich $AC = \frac{8 + 112,5}{2} = \frac{120,5}{2} = 60,25'$. Hieraus findet man den Sector = 0,008726 . 60 . $60,25^2$ = 1900,45

Quadratfuß. In dem △ ADC ist die Höhe CB = 60,25 − 8 = 52,25 und △ ADC = 52,25 . 30 = 1567,5 Quadratfuß und endlich das Segment AEDA = 1900,45 − 1567,5 = 532,95 Quadratfuß.

§. 202.

Wenn man in einem Kreise (Fig. 174.) den Bogen AEB = 90° nimmt, die Chorde AB ziehet und über diese einen Halbkreis beschreibt, so heißt diese vom Halbkreis und dem Bogen des Quadranten begränzte krummlinichte Figur der Mond des Hippokrates. Es läßt sich beweisen, daß der Mond des Hippokrates AEBFA dem Dreyeck ABC oder dem vierten Theil des Quadrats auf AB gleich ist.

1) Der Kreis ABGD = π . AC² (§. 196. Num. 2.), also der vierte Theil des Kreises = $\frac{ABGD}{4}$ = Sector AEBC = $\frac{\pi AC^2}{4}$. Ferner ist ein Kreis, dessen Durchmesser = AB ist, = $\frac{\pi AB^2}{4}$ (§. 195. Num. 2.) und der Halbkreis AFB = $\frac{\pi . AB^2}{8}$, aber AC = CB (§. 14.) und AC² = CB² (§. 71), also AC² + CB² = 2 AC² = AB² (§. 93.) und wenn man das in den vorigen Ausdruck bringt, so ist der Halbkreis AFB = $\frac{2\pi AC^2}{8}$ =

$\frac{\pi AC^2}{4}$. Aber vorhin ist bewiesen, daß der Sector AEBC $= \frac{\pi AC^2}{4}$ ist, also ist der Halbkreis AFB = Sector AEBC und wenn man auf beyden Seiten das Segment AEB = AEB abschneidet, so ist AEBFA = △ ABC.

*) Man verlängere AC und BC bis G und D und ziehe AD, DG und GB, so sind in den Dreyecken ACB, BCG, GCD und DCA die Seiten AC, BC, GC, DC gleich oder AC = BC = GC = DC (§. 14.) und alle Winkel am Mittelpuncte sind rechte Winkel, weil AEBC ein Quadrant ist; also sind diese Dreyecke gleich (§. 37.) und AB = BG = GD = DA und $x = m$ und $y = n$. Da ferner diese Dreyecke gleichschenklicht und rechtwinklicht bey C sind, so ist $x = y = m = n = 45°$ (§. 67), also $x + n = 90°$ und $y + m = 90°$. Die Figur ABGD hat also rechte Winkel und gleiche Seiten, sie ist also ein Quadrat (§. 69.) = $AB^2$ und △ ABC = $\frac{1}{4} AB^2$ und also auch der Mond AFBEA = $\frac{1}{4} AB^2$.

## §. 203.

**Wenn in einen größern Kreis (Fig. 175.) aus demselben Mittelpuncte C ein kleinerer concentrischer Kreis beschrieben wird, so ist der Inhalt des Kreisringes zwischen den beyden parallelen**

Peripherien dem Unterschiede der Quadrate der Radien multiplicirt mit $\pi$ gleich oder $= \pi \cdot (AC^2 - CB^2)$.

Des größern Kreises Inhalt ist $= M = \pi \cdot AC^2$ (§. 196. Num. 2.) und der Inhalt des kleinern Kreises $= m = \pi \cdot CB^2$, also $M - m$ = dem Ringe $= \pi \cdot AC^2 - \pi \cdot CB^2 = \pi \cdot (AC^2 - CB^2)$.

**Anmerk.** Wenn man allgemein den Radius des größern Kreises $= R$ und des kleinern Kreises $= r$ setzt, so ist der Ring $= \pi \cdot (R^2 - r^2)$. Dies ist nicht allein von concentrischen Kreisen, welche einerley Mittelpunct haben, oder von dem eigentlichen Ringe wahr; sondern es gilt auch von excentrischen Kreisen, welche nicht einerley Mittelpunct haben, wie in Fig. 176, wenn nur $R > r$ und die Peripherie des kleinern Kreises mag dann entweder ganz innerhalb der Peripherie des größern Kreises liegen, wie in Fig. 176, oder dieselbe berühren, wie in Fig. 177.

## Neuntes Kapitel.

### Vergleichung des Inhalts ebener Figuren.

§. 204.

Wenn zwey Parallelogramme BD und BF (Fig. 178.) von gleichem Inhalte sind und überdies zwey

zwey gleiche Winkel A = E haben, so sind die Seiten, welche die gleichen Winkel einschließen, in verkehrter Proportion, AB : BG = BE : BC.

Man lege die Parallelogramme so an einander, daß AB und BG eine gerade Linie ausmachen, so müssen auch EB und BC eine gerade Linie seyn (§. 35). Man verlängere DC und GF bis H, so wird BGHC ein Parallelogramm seyn (§. 62). Nun ist Parallel. BD : Parall. BH = AB : BG (§. 138), aber BD = BF (Beding.), also Parall. BF : Parall. BH = AB : BG, nun ist Parall. BF : Parall. BH = EB : BC (§. 138); also AB : BG = EB : BC (§. 77. Arith.)

§. 205.

Wenn in zwey Parallelogrammen BD und BF (Fig. 178.) A = E und AB : BG = BE : BC ist, so sind die Parallelogramme gleich oder BD = BF.

Da AB : BG = BE : BC (Beding.) und AB : BG = DB : BH (§. 138), so ist DB : BH = BE : BC, aber BE : BC = BF : BH, also DB : BH = BF : BH, also DB = BF (§. 76. Arith.).

§. 206.

1) Wenn zwey Dreyecke ABC und DBE (Fig. 179.) gleich groß sind und einen gleichen Winkel x = y haben, so sind die Seiten, die diesen Winkel einschließen, verkehrt proportionirt, AB : BE = DB : BC.

Man bringe die Seiten AB und BE in eine gerade Linie, so werden auch CB und BD eine gerade Linie ausmachen (§. 35). Ziehet man nun CE so ist △ ABC : △ CBE = AB : BE (§. 140), aber △ ABC = △ BDE (Beding.), also △ BDE : △ CBE = AB : BE, aber △ BDE : △ CBE = BD : BC (§. 140), also AB : BE = BD : BC (§. 77. Arith.)

2) Wenn zwey Dreyecke ABC und DBE einen gleichen Winkel x = y und um diesen verkehrt proportionirte Seiten AB : BE = BD : BC haben, so sind sie gleich groß oder △ ABC = △ DBE.

AB : BE = BD : BC (Beding.), aber AB : BE = △ ABC : △ CBE (§. 140), also △ ABC : △ CBE = BD : BC, aber BD : BC = △ BDE : △ CBE, also △ ABC : △ CBE = △ BDE : △ CBE (§. 77. Arith.), also △ ABC = △ BDE (§. 76. Arith.).

Anmerk. Hieraus folgt, daß wenn zwey rechtwinklichte Dreyecke gleich groß sind, ihre Katheten verkehrt proportionirt sind, und daß, wenn ihre Katheten verkehrt proportionirt sind, sie gleiche Größe haben.

§. 207.

Zwey ähnliche Dreyecke ABC und DEF (Fig. 180.) verhalten sich, wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten AB und DE oder △ ABC : △ DEF = $AB^2 : DE^2$.

Man

Man fälle von C und F auf AB und DE die senkrechten Linien CG und FH, so ist, weil in ähnlichen Dreyecken die Grundlinien sich wie die Höhen verhalten (§. 150.) AB : DE = CG : FH und $FH = \frac{DE \cdot CG}{AB}$ (§. 98. Arith.). Ferner △ ABC : △ DEF = AB . CG : DE . FH (§. 139.) und wenn man statt FH seinen Werth setzt, △ ABC : △ DEF = $AB \cdot CG : \frac{DE \cdot DE \cdot CG}{AB} = AB \cdot AB \cdot CG : DE \cdot DE \cdot CG = AB^2 : DE^2$ (§. 74. Arith.).

§. 208.

Zwey ähnliche Polygone ABCDE und abcde (Fig. 168.) verhalten sich wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten = $AB^2 : ab^2$.

1) Man theile die Polygone durch die Diagonale AD und ad, DB und db in Dreyecke. Weil nun die Polygone ähnlich sind, so ist EA : ea = AB : ab = BC : bc u. s. w. (§. 147), folglich auch $EA^2 : ea^2 = AB^2 : ab^2 = BC^2 : bc^2$ (§. 89. Arith.). Es ist aber (§. 207.)

△ AED : △ aed = $AE^2 : ae^2$ =
△ ABD : △ abd = $AB^2 : ab^2$ =
△ BCD : △ bcd = $BC^2 : bc^2$ =

also △ AED + △ ABD + △ BCD : △ aed + △ abd + △ bcd = $AE^2 : ae^2 = AB^2 : ab^2 = BC^2 : bc^2$ (§. 86. Arith.); folglich

Pol ABCDE : Pol. abcde = $AE^2 : ae^2$ = $BC^2 : bc^2$ u. s. w.

2) Man theile die Polygone (wie in Fig. 167.) von einem innerhalb derselben liegenden Puncte C und c, welcher bey regulären Polygonen der Mittelpunct des um oder in dieselben beschriebenen Kreises ist (§. 165. 167. 176.), in ähnliche Dreyecke, so ist (§. 207.)

$\triangle ABC : \triangle abc = AB^2 : ab^2 =$
$\triangle BDC : \triangle bdc = BD^2 : bd^2 =$
$\triangle DEC : \triangle dec = DE^2 : de^2 =$
$\triangle EFC : \triangle efc = EF^2 : ef^2 =$
$\triangle AFC : \triangle afc = AF^2 : af^2$

also $\triangle ABC + \triangle BDC + \triangle DEC + \triangle EFC + \triangle AFC : \triangle abc + \triangle bdc + \triangle dec + \triangle efc + \triangle afc$ = Polygon ABDEF : Polygon abdef = $AB^2 : ab^2 = BD^2 : bd^2 = DE^2 : de^2$ u. s. w. (§. 186. Arith.).

## §. 209.

Aus dem vorhergehenden Lehrsatze lassen sich folgende Schlüsse herleiten (Fig. 168. 167):

1) **Aehnliche vierseitige Figuren verhalten sich wie die Quadrate ähnlicher Seiten**; denn $\triangle AED + \triangle ABD : \triangle aed + \triangle abd = AE^2 : ae^2 = AB^2 : ab^2$ u. s. w. (§. 208. Num. 1.).

2)

2) **Reguläre ähnliche Polygone verhalten sich wie die Quadrate der Halbmesser der um sie beschriebenen Kreise** $= AC^2 : ac^2$ **oder wie die Höhen der Dreyecke** $CG^2 : cg^2$. $AB : ab = AC : ac = CG : cg$ (§. 150. 176), also $AB^2 : ab^2 = AC^2 : ac^2 = CG^2 : cg^2$ (§. 89. Arith.), aber $ABDEF : abdef = AB^2 : ab^2$ (§. 208. Num. 2.), also auch $ABDEF : abdef = AC^2 : ac^2 = CG^2 : cg^2$.

3) **Aehnliche Stücke ähnlicher regulärer Polygone verhalten sich wie die Quadrate der Seiten oder Radien oder** $ABDCA : abdca = AB^2 : ab^2$, weil $\triangle ABC + \triangle BDC : \triangle abc + \triangle bdc = AB^2 : ab^2$ (§. 86. Arith.) $= AC^2 : ac^2$.

4) **Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser, Durchmesser oder Peripherien,** denn Kreise kann man als ähnliche reguläre Polygone von unendlich vielen Seiten ansehen, in welchen die Halbmesser ähnlich liegende Linien sind. Es verhält sich also der Kreis C zum Kreise $c = R^2 : r^2$. Es ist ferner bewiesen, daß $C = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}$ (§. 196.) $= \frac{P^2}{4\pi}$ (§ 197.) und $c = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{p^2}{4\pi}$; also $C : c = \pi R^2 : \pi r^2 = \frac{\pi D^2}{4} : \frac{\pi d^2}{4} = \frac{P^2}{4\pi}$ :

$: \frac{p^2}{4\pi} = D^2 : d^2 = P^2 : p^2$, wenn man diese Verhältnisse mit einerley Größe multiplicirt oder dividirt.

5) Aehnliche Sectoren, deren Bogen gleich viele Grade fassen, verhalten sich wie die Quadrate der Radien der Kreise z. B. (Fig. 181.) $AFBC : DGEC = AC^2 : CD^2$; man kann sie nämlich als ähnliche Stücke ähnlicher Polygone von unendlich vielen Seiten betrachten und demnach verhalten sie sich wie $AC^2 : CD^2$ (§. 209. Num. 3.). Ueberdies ist der Inhalt des Sectors $ABC = \frac{n \cdot AC^2 \cdot \pi}{360}$ und des Sectors $DEC = \frac{n \cdot DC^2 \cdot \pi}{360}$ (§. 199), also $ABC : DEC = \frac{n \cdot AC^2 \cdot \pi}{360} : \frac{n \cdot CD^2 \cdot \pi}{360}$ und, wenn man mit 360 multiplicirt und durch $n \cdot \pi$ dividirt, $= AC^2 : CD^2$.

§. 210.

Zwey ähnliche Segmente ABF und DGE (Fig. 181), deren Bogen gleich viele Grade fassen, verhalten sich wie die Quadrate der Radien AC und CD der Kreise, wovon die Segmente Theile sind.

Wenn man die Puncte B und E in den einen Radius CE bringt, so müssen A und D in den andern Ra-

Radius CD fallen (§. 28). Nun ist der Sector AFBC : Sector DGEC = $AC^2 : CD^2$ (§. 209. Num. 5.), aber △ ABC : △ DEC = $AC^2 . CD^2$ (§. 207.) also AFBC : DGEC = △ ABC : △ DEC und AFBC : △ ABC = DGEC : △ DEC (§. 81. Arith.) und AFBC — △ ABC : △ ABC = DGEC — △ DEC : △ DEC (§. 85. Arith.) d. h. Segment AFB : △ ABC = Segm. DGE : △ DEC und Segm. AFB : Segm. DGE = △ ABC : △ DEC = $AC^2 : CD^2$ (§. 207).

Anmerk. Weil △ ABC ∽ △ DEC, so ist AC : CD = AB : DE (§. 148) und $AC^2 : CD^2 = AB^2 : DE^2$ (§. 89. Arith.); also verhalten sich ähnliche Sectoren und Segmente wie die Quadrate der Chorden ihrer Kreisbogen.

## §. 211.

Wenn man an der Hypotenuse AB (Fig. 182) eines rechtwinklichten Dreyecks ABC und an dessen beyden Katheten AC und BC ähnliche Figuren z. B. Dreyecke zeichnet, so ist die Summe der Figuren an den Katheten der Figur an der Hypotenuse gleich oder ACE + CBD = ABF.

△ ACE : △ BCD = $AC^2 : BC^2$ (§. 207. 208. 209.), also △ ACE + △ BCD : △ BCD = $AC^2 + BC^2 : BC^2$ (§. 85. Arith.); aber $AC^2 + BC^2 =$

$AB^2$

$AB^2$ (§ 93), also $\triangle ACE + \triangle BCD : \triangle BCD = AB^2 : BC^2$. Ferner ist $AB^2 : BC^2 = \triangle ABF : \triangle BCD$ (§. 207—209), also $\triangle ACE + \triangle BCD : \triangle BCD = \triangle ABF : \triangle BCD$ (§. 77. Arith.); folglich $\triangle ACE + \triangle BCD = \triangle ABF$ (§. 76. Arith.).

## §. 212.

Aus diesem Lehrsatze lernt man:

1) **Wenn zwey ähnliche Figuren gegeben sind, eine dritte Figur zu finden, welche so groß als die Summe der beyden gegebenen ist.**

Man zeichne einen rechten Winkel ACB (Fig. 182), mache AC so groß als eine Seite der einen gegebenen Figur und BC gleich der ähnlichen Seite in der andern Figur. Man ziehe darauf AB, so ist diese die ähnlich liegende Seite der dritten Figur, welche so groß als die Summe der beyden andern ist (§. 93. 211).

2) Gleichfalls kann man eine dritte ähnliche Figur finden, **welche dem Unterschiede zweyer andern ähnlichen Figuren gleich ist** (§. 211).

3) Auf eben die Art kann man einen dritten Kreis, ein Segment oder einen Sector finden, welcher der Summe oder der Differenz zweyer andern Kreise, Segmente oder Sectoren gleich ist.

4) Wenn man an der Hypotenuse AB (Fig. 183) eines rechtwinklichten Dreyecks einen Halbkreis beschreibt und ebenfalls an jeder der Katheten AC

und

und CB, so ist die Summe der Monde ADCEA + CFBGC dem Dreyeck ABC gleich. ADCA + CFBC = ACGBA (§. 211) und wenn man auf beyden Seiten AECA + CGBC = AECA + CGBC subtrahirt, so ist ADCEA + CFBGC = △ ABC.

§. 213.

Es sind zwey ähnliche Figuren M und N (Fig. 184. 185) gegeben, man soll eine dritte ähnliche Figur X finden, welche die mittlere geometrische Proportionalgröße zu M und N ist.

1) Man mache CH = AB und HI = EF, welche beyden Seiten AB und EF ähnlich liegende Seiten der gegebenen Figuren M und N sind.
2) Zwischen CH und HI suche man die mittlere Proportionallinie HK (§. 159).
3) Wenn man nun CD = HK macht und auf CD eine den Figuren M und N ähnliche Figur X zeichnet, so ist diese die mittlere geometrische Proportionalgröße zu M und N.

**Beweis.** Vermöge der Construction ist CH : HK = HK : HI, aber CH = AB, HK = CD und HI = EF, also AB : CD = CD : EF und $AB^2 : CD^2 = CD^2 : EF^2$ (§ 89. Arith.), aber $AB^2 : CD^2$ = M : X und $CD^2 : EF^2$ = X : N (§. 207-209), also M : X = X : N (§. 77. Arith.)

§. 214.

## §. 214.

**Es ist eine Figur M (Fig. 186. 187.) gegeben; man soll eine ähnliche Figur Y zeichnen, zu der die gegebene Figur M ein bestimmtes Verhältniß wie P : Q hat, so daß P : Q = M : Y ist.**

1) Unter der Bedingung, daß P < Q, mache man EF = P und EG = Q.

2) Man halbire EG und beschreibe über EG einen Halbkreis und ziehe FH senkrecht auf EG (§. 43).

3) Man ziehe die Chorden EH und HG und mache auf HE die Linie HK = AB.

4) Man ziehe KL parallel mit EG, so ist KL die der AB ähnliche Seite der gesuchten Figur.

5) Man mache CD = KL und beschreibe darüber eine Figur Y, welche M ähnlich ist, so ist P : Q = M : Y.

**Beweis.** Vermöge der Construction ist AB = HK und CD = KL, also AB : CD = HK : KL (§. 73. Arith.) und $AB^2 : CD^2 = HK^2 : KL^2$ (§. 89. Arith.), aber $AB^2 : CD^2 = M : Y$ (§. 207-209), also $M : Y = HK^2 : KL^2$. In dem rechtwinklichten Dreyeck HKL ist KL : HK = HK : KO (§. 158.) und $HK^2 = KL \cdot KO$ (§. 78. Arith.) und wenn man dies in obige Proportion setzt, so ist $M : Y = KL \cdot KO : KL^2$ und, wenn man rechts mit KL dividirt, M : Y = KO : KL = EF : EG (§. 148), aber EF = P und EG = Q, also M : Y = P : Q.

An-

**Anmerk.** Ist $P > Q$, so mache man $EF = P$ und $FG = Q$, nehme $HK = AB$, ziehe KL, so ist KL die der Seite AB ähnliche Seite der Figur Y; denn $M : Y = AB^2 : CD^2 = HK^2 : HL^2$, aber $HK^2 = KL . KO$ und $HL^2 = KL . LO$, also $M : Y = KL . KO : KL . LO = KO : LO = EF : FG = P : Q$.

## §. 215.

**Wenn zwey Dreyecke ABC und abc (Fig. 188.) einen gleichen Winkel $C = c$ haben, so sind die Flächen der Dreyecke im zusammengesetzten Verhältniß derjenigen Seiten, welche den gleichen Winkel einschließen oder $\triangle ABC : \triangle abc = AC . CB : ac . cb$.**

Auf eine der Seiten CB und cb, welche den gleichen Winkel einschließen, ziehe man von der gegenüberstehenden Spitze A und a die senkrechte Linie AD und ad. Weil nun $C = c$ und $D = d = 90°$ ist, so ist $\triangle ADC \sim \triangle adc$ (§. 149), $AC : ac = AD : ad$ und $ad = \frac{ac . AD}{AC}$ (§. 98. Arith.). Ferner $\triangle ABC : \triangle abc = CB . AD : cb . ad$ (§. 139.) und wenn man den Werth von ad gebraucht, so ist $\triangle ABC : \triangle abc = CB . AD : \frac{cb . ac . AD}{AC}$ und wenn man mit AC multiplicirt, so ist $\triangle ABC : \triangle abc = CB . AD . AC : cb . ac . AD$ (§. 74. Arith.) und durch die Division mit AD ist $\triangle ABC : \triangle abc = CB . AC : cb . ac$ (§. 74. Arith.)

# Die Stereometrie
oder
# körperliche Geometrie.

## Erstes Kapitel.
### Von der Lage der Ebenen.

§. 216.

**Eine gerade Linie ist auf einer Ebene senkrecht,** wenn sie mit allen Linien, die sich in der Ebene durch den Punct, in welchem die Linie die Ebene berührt, ziehen lassen, rechte Winkel macht.

**Eine Ebene CD** (Fig. 189.) **ist auf einer andern Ebene AB senkrecht,** wenn sie sich eben so wenig zur einen als zur andern Seite neigt, welches sich dadurch bestimmen läßt, daß, wenn man von einem Puncte F in der Durchschnittslinie CE der beyden Ebenen in der Ebene AB die auf CE senkrechte Linie FH und in der Ebene CD die ebenfalls auf CE senkrechte Linie FG ziehet, diese senkrechten Linien einen rechten Winkel GFH machen.

§. 217.

**Die Neigung oder Inclination einer geraden Linie gegen eine Ebene,** CD gegen AB (Fig. 190), wird durch den Winkel DCE bestimmt, welcher ent-

entsteht, wenn man von D eine senkrechte Linie DE auf die Ebene AB herabfällt und C und E durch eine gerade Linie verbindet. **Die Neigung einer Ebene CD (Fig. 191) gegen eine andere Ebene AB wird durch den Winkel GFH bestimmt**, welcher entsteht, wenn man von einem Puncte F in der Durchschnittslinie CE beyder Ebenen die Linien HF und GF auf CE senkrecht ziehet, woraus zugleich folgt, daß die Ebene CD auf der Ebene AB senkrecht steht, wenn der Neigungswinkel HFG ein rechter ist. Sind die Neigungswinkel zweyer Ebenen gleich, so sagt man, die Ebenen hätten **dieselbe Neigung oder seyen auf ähnliche oder auf gleiche Weise gegen einander gestellt. Eine Linie ist mit einer Ebene parallel oder zwey Ebenen sind unter sich parallel**, wenn sie allenthalben gleich weit von einander stehen oder nicht zusammenlaufen.

## §. 218.

**Ein körperlicher Winkel wird von mehr als zwey ebenen Winkeln**, welche alle in verschiedenen Flächen liegen, aber doch in eine gemeinschaftliche Spitze zusammentreffen, begränzt. Die Ecken eckiger Körper sind körperliche Winkel. **Gleiche körperliche Winkel** sind solche, die von gleich vielen und nach der Ordnung gleich großen ebenen Winkeln eingeschlossen sind.

§. 219.

**Wenn man in einer Ebene eine gerade Linie CD (Fig. 192.) ziehet, so liegt sie gänzlich und durchaus in dieser Ebene oder ein Theil der Linie, CE, kann nicht in der Ebene und ein anderer Theil, EF, oberhalb oder unterhalb derselben liegen.**

Angenommen, daß ein Theil CE in der Ebene und ein anderer Theil EF oberhalb derselben liegen könne, so verlängere man EC in der Ebene AB nach D. Hieraus würde folgen, daß zwey gerade Linien sich nicht in einem einzigen Puncte, sondern in einer Linie EC schneiden könnten, welches doch unmöglich ist (§. 7. Num. 2.).

§. 220.

**Jedes Dreyeck oder drey Puncte, welche nicht in gerader Linie liegen, bestimmen die Lage einer Ebene.**

Wenn △ ABC (Fig. 193.) nicht die Lage einer Ebene bestimmte oder eine Ebene ausmachte, so müßte ein Theil derselben, z. B. DEC, in einer andern Ebene liegen und folglich auch der eine Theil der Linie AC in der Ebene ABC und der andere CD außerhalb derselben liegen, welches §. 219. widerspricht.

**Anmerk.** Hieraus folgt, daß drey Puncte in der Peripherie eines Kreises, die Winkelpuncte eines Parallelogramms und zwey Parallellinien die Lage einer Ebene bestimmen.

§. 221.

§. 221.

**Wenn zwey Ebenen AB und CD (Fig. 194.) sich schneiden, so ist ihr Durchschnitt eine gerade Linie EF.**

Wäre der Durchschnitt keine gerade Linie, so müßte man in der Ebene AB von F nach E eine gerade Linie FE ziehen können; gleichfalls müßte sich in der Ebene CD von F nach E eine zweyte gerade Linie FGE ziehen lassen (§. 5. und 6.). Beyde gerade Linien würden also einen Raum einschließen, welches doch unmöglich ist (§. 7. Num. 3.).

§. 222.

**Wenn zwey parallele Ebenen AB und CD (Fig. 195.) von einer dritten Ebene EG geschnitten werden, so sind die Durchschnittslinien EF und HG parallel.**

Denn wenn die Linien EF und HG, erstere in der Ebene AB und letztere in der Ebene CD, nicht allenthalben gleiche Entfernung von einander hätten, so könnten auch die Ebenen AB und CD nicht allenthalben gleich weit von einander abstehen oder parallel seyn (§. 219. 221.), welches gegen die Voraussetzung ist.

§. 223.

**Wenn die Linie EF (Fig. 196.) auf zwey Linien AB und CD, welche in der Ebene liegen und sich in E durchschneiden, senkrecht steht, so stehet**

sie auch auf jeder andern in derselben Ebene durch E gezogenen Linie und auf der Ebene selbst senkrecht.

Man mache AE = EB = EC = ED, ziehe AD und CB und lege durch E eine beliebige Linie GH. Von einem Puncte F in der Linie FE ziehe man FA, FG, FD, FC, FH und FB. In den Dreyecken AED und CEB ist AE = EB, DE = EC und AED = CEB (§. 34), also AD = CB und EAD = EBC (§. 37). Ferner ist in den Dreyecken GAE und EBH die Linie AE = EB und AEG = BEH (§. 34), also GE = EH und AG = HB (§. 46). Ferner in den Dreyecken AEF und BEF ist AE = EB, FE = FE und AEF = BEF = R (Beding.), also FA = FB (§. 34.) und auf eben die Weise in den Dreyecken DEF und CEF die Linie FD = FC. In den Dreyecken AFD und BFC sind bewiesener Maaßen alle Seiten gleich, also FAD = FBC (§. 41). In den Dreyecken AGF und BHF ist außer dem Winkel FAD = FBC die Seite AG = HB und AF = BF, also FG = FH. Endlich ist bewiesen, daß in den Dreyecken GEF und HEF die Linie GE = EH, FG = FH und FE = FE ist; also Winkel GEF = HEF (§. 41), also FE senkrecht auf GH (§. 11). Da es sich nun auf eben die Art beweisen läßt, daß FE auf jeder andern durch E gelegten Linie senkrecht ist, so muß sie auch auf der Ebene selbst senkrecht seyn (§. 216).

An-

Anmerk. Dies ist der Beweis des Euklides (Euklides Elemente, Buch XI. Satz 4.). Kürzer läßt sich der Beweis so führen. Es soll bewiesen werden, daß wenn FE (Fig. 197.) auf zwey Linien AE und DE senkrecht ist, sie zugleich auf der Ebene senkrecht sey, die man durch diese Linien legen kann, und zugleich auf allen andern Linien GE, BE, CE, welche sich in dieser Ebene ziehen lassen. Man stelle sich vor, daß die Linie FE unverrückt in ihrer Lage bleibe, aber der rechte Winkel FEA sich um FE wie um eine Achse drehe, so wird AE, wenn der rechte Winkel nach ED kommt, mit ED zusammenfallen (§. 10. 18.), weil FEA = FED = R ist (Beding.). Weil aber drey Puncte A, E und D die Lage einer Ebene bestimmen (§. 220), so hat die Linie AE durch diese Bewegung eine Ebene ADBA beschrieben und weil die Winkel FEG, FEB, FEC nichts anders als derselbe rechte Winkel FEA sind, welcher nur bey seiner Bewegung um FE in diese verschiedenen Lagen gekommen ist, so ist FEG = FEB = FEC = R und also FE auf allen Linien AE, GE, DE, BE, CE, welche man in der Ebene ziehen kann, und folglich auch auf der Ebene selbst senkrecht (§. 216).

§. 224.

**Wenn eine gerade Linie AB (Fig. 198.) auf drey andern Linien BC, BD und BE, welche alle aus dem Puncte B ausgehen, senkrecht ist, so liegen diese Linien BC, BD und BE in einer und derselben Ebene MN.**

Wenn der Winkel EBD nicht in derselben Ebene mit dem Winkel DBC läge, so müßten beyde in verschiedenen Ebenen liegen. Man verlängere also die Ebene EBD, bis sie die Ebene ABC irgendwo, z. B. in BF, schneidet (§. 221). Weil nun AB auf BE und BD in der Ebene BED senkrecht ist (Beding.), so ist sie auch auf jeder andern Linie in gedachter Ebene senkrecht (§. 223); also ist AB auch auf BF senkrecht und $ABF = R$ (§. 216); aber vermöge der Voraussetzung ist $ABC = R$, also $ABF = ABC$ oder ein Theil so groß als das Ganze. Da aber dieses unmöglich ist (§. 6. Grundſ. 1. Arith.), so ist es auch unmöglich, daß die Linien BC, BD und BE in verschiedenen Ebenen liegen; sie müssen also in Einer Ebene liegen.

§. 225.

**Wenn zwey Linien AB und CD (Fig. 199.) auf einer und derselben Ebene GH senkrecht sind, so sind sie unter sich parallel.**

Durch die beyden Puncte, in welchen die beyden Linien auf die Ebene stoßen, ziehe man die Linie BD, so

ist

ist ABDC eine Ebene (§. 220). Weil vermöge der Bedingung AB und CD auf der Ebene GH senkrecht sind, so sind sie auch auf der Linie BD senkrecht (§. 223); also ABD + CDB = 2 R und folglich AB mit CD parallel (§. 62).

## §. 226.

**Wenn zwey Linien AB und CD parallel sind, die eine aber, AB, (Fig. 199.) auf der Ebene GH senkrecht stehet, so stehet auch die andere, CD, auf derselben Ebene GH senkrecht.**

Man ziehe in der Ebene GH die Linie BD, errichte DE senkrecht auf BD, mache DE = AB und ziehe endlich die Linien AD, AE und EB. In den Dreyecken ABD und BDE ist der Winkel ABD = BDE = R (Beding. und Construction), BD = BD, AB = DE, also AD = BE (§. 37). In den Dreyecken ADE und ABE ist AD = BE, DE = AB und AE = AE, also Winkel ADE = ABE = R (§. 41), aber EDB = R (Construction), also ist ED auf der Ebene ABD oder ABDC (§. 223.) senkrecht und der Winkel EDC = R. Aber vermöge der Voraussetzung ist AB parallel mit CD, also ABD + CDB = 2 R (§. 60), aber ABD = R (Beding.), also auch CDB = R. Die Linie CD ist also auf zwey in der Ebene GH gezogenen Linien BD und DE senkrecht, folglich steht sie auch auf der Ebene GH senkrecht (§. 223).

§. 227.

**Wenn zwey Linien AB und CD (Fig. 200), welche in Einer Ebene MN liegen, einer dritten Linie EF außerhalb der Ebene MN parallel sind, so sind die Linien AB und CD unter sich parallel.**

Man wähle in EF einen Punct G und ziehe in der Ebene EB die Linie GH auf EG senkrecht und in der Ebene ED die Linie GK ebenfalls auf EG senkrecht, so ist EG auf der Ebene GHK senkrecht (§. 223); folglich ist auch AB, welche mit EF parallel ist, auf GHK senkrecht, welches auch von CD gilt (§. 226); also sind AB und CD unter sich parallel (§. 225).

§. 228.

**Wenn zwey Winkel ABC und DEF (Fig. 201.) von Linien gebildet werden, die parallel sind, AB mit DE und BC mit EF, so sind die Winkel gleich groß.**

Man mache AB = DE, BC = EF und ziehe AD, BE, CF nebst AC und DF. Weil die gleich großen Parallellinien AB und DE durch AD und BE verbunden werden, so sind auch diese gleich und parallel (§. 63); aus gleicher Ursache sind auch BE und CF gleich und parallel (§. 74. 227.); folglich sind auch AC und DF gleich und parallel (§. 63). In den Dreyecken ABC und DEF ist AB = DE, BC = EF, AC = DF; also Winkel ABC = DEF (§. 41).

§. 229.

§. 229.

In einem Puncte A (Fig. 202.) in einer gegebenen Ebene HI läßt sich nur eine einzige senkrechte Linie AB errichten und von einem Puncte C außerhalb der Ebene nur eine einzige senkrechte Linie CD auf die Ebene herabfällen.

1) Wäre es möglich, daß sich in A mehrere senkrechte Linien errichten ließen, z. B. AB und AF, so wäre GAF = R; aber vermöge der Voraussetzung ist GAB = R, also GAF = GAB, welches unmöglich (§. 6. Arith.).

2) Könnten von C mehrere senkrechte Linien auf die Ebene gefället werden, so sey CD die eine und CE die andere. Man ziehe DE, so sind in dem Dreyeck CDE zwey rechte Winkel D und E, welches unmöglich (§. 49. Num. 2.).

§. 230.

Wenn eine gerade Linie AB (Fig. 203.) auf der Ebene CD senkrecht steht, so steht jede Ebene EF, welche man durch diese Linie legt, auf der Ebene CD senkrecht.

In einem Puncte H in der Durchschnittslinie EG der beyden Ebenen errichte man in der Ebene EF die senkrechte Linie HK, so ist, weil ABH + KHB = 2 R (Beding.), HK mit AB parallel (§. 62), also steht auch HK auf der Ebene CD senkrecht (§. 226.) und folglich

auch AH oder FE (§. 220.) auf der Ebene CD senkrecht (§. 216).

§. 231.

**Wenn die Ebene CD (Fig. 189.) auf der Ebene AB senkrecht steht, so steht auch die Linie GF, welche auf der Durchschnittslinie CE senkrecht ist, auf der Ebene AB senkrecht.**

In der Ebene AB ziehe man FH auf CE senkrecht, so ist GFH der Neigungswinkel der Ebenen (§. 217.) = R; aber vermöge der Voraussetzung ist zugleich GFC = R; also ist GF auf zwey in der Ebene AB gezogenen Linien FH und FC senkrecht, also ist sie auch senkrecht auf der Ebene AB (§. 223).

§. 232.

Wenn die Ebene CD (Fig. 191) auf der Ebene AB schräg oder schief steht, so ist GFH der Inclinations- oder Neigungswinkel dieser Ebenen, welcher entsteht, wenn GF und HF auf die Durchschnittslinie CE senkrecht gezogen werden (§. 217). Ziehet man nun an andern Orten IC, CK und DE, EB auf CE senkrecht, so sind auf DEB und ICK Neigungswinkel. Weil nun aber IC, GF und DE, ferner KC, HF und BE parallel sind (§. 59), so ist der Neigungswinkel der beyden Ebenen = ICK = GFH = DEB (§. 228), woraus man ersiehet, daß eine Ebene CD, welche

welche ſchief auf einer andern Ebene AB ſteht, allenthalben einerley Neigung oder Inclination hat.

§. 233.

**Wenn zwey Ebenen CD und EF (Fig. 204) auf einer dritten Ebene AB ſenkrecht ſtehen, ſo iſt auch die Durchſchnittslinie beyder Ebenen GH auf der Ebene AB ſenkrecht.**

In der Ebene AB ziehe man HI ſenkrecht auf CH, ſo iſt HI ſenkrecht auf der Ebene CD (§. 231) und GHI = R (§. 217). In der Ebene AB ziehe man KH ſenkrecht auf HE, ſo iſt KH ſenkrecht auf der Ebene EF (§. 231) und GHK = R (§. 217). Die Linie GH ſteht alſo auf zwey in der Ebene AB gezogenen Linie HK und HI ſenkrecht, alſo ſteht ſie auch auf der Ebene AB ſenkrecht (§. 223.)

§. 234.

**Wenn eine gerade Linie AB (Fig. 205) auf zwey Ebenen CD und EF ſenkrecht iſt, ſo ſind dieſe Ebenen parallel.**

Wenn dieſe Ebenen nicht allenthalben eine gleiche Entfernung von einander = AB behalten, ſo müſſen ſie irgendwo in GH zuſammenlaufen. Ziehet man nun von I nach A und B die Linien IA und IB, erſtere in der Ebene CH und letztere in der Ebene HE, ſo entſteht das Dreyeck IAB, in welchem bey A und B rechte Winkel ſind; da aber dies unmöglich iſt (§. 49. Num. 3), ſo können die

Ebenen

Ebenen CD und EF nicht zusammenlaufen, sondern müssen parallel seyn.

§. 235.

**Wenn zwey gerade Linien AB und BC (Fig. 206), welche einen Winkel ABC bilden, zwey andern Linien DE und EF, welche den Winkel E bilden, und in einer andern Ebene liegen, parallel sind, so sind die Ebenen AC und DF parallel.**

Aus B ziehe man BG auf die Ebene DF senkrecht und lege durch G die Linien GH und GK mit ED und EF parallel, so ist BGH = BGK = R (§. 223); weil aber BGH + GBA = BGK + GBC = 2 R (§. 60. 227), so ist GBC = GBA = R, also GB senkrecht auf der Ebene AC und folglich die beyden Ebenen AC und DF parallel.

§. 236.

**Wenn zwey gerade Linien AB und CD (Fig. 207) von parallelen Flächen HG, LK und NM geschnitten werden, so werden sie in proportionirte Theile geschnitten oder AE : EB = CF : FD.**

Man ziehe AC, BD und AD und durch O, wo die Linie AD die Ebene LK trifft, OF und OE. Weil nun die parallelen Ebenen LK und MN von der Ebene EODB geschnitten werden, so ist EO mit

DB

DB und aus eben der Urſache OF mit AC parallel (§. 222), alſo AE : EB = AO : OD = CF : FD (§. 141.)

## Zweytes Kapitel.

### Vom Prisma und Parallelepipedum.

§. 237.

**Ein Prisma** iſt ein geometriſcher Körper, welcher oben und unten von zwey gleichen, ähnlichen, parallelen und geradlinichten Figuren, die man Grundflächen nennt, an den Seiten aber von ſo vielen Parallelogrammen, als die Grundflächen Seiten haben, begrenzt wird. Dieſe Parallelogramme nennt man die **Seiten** oder **Seitenflächen** deſſelben. Stehen die Seitenflächen ſenkrecht auf den Grundflächen, ſo nennt man das Prisma ein **ſenkrechtes** oder **lothrechtes Prisma** und eines ſolchen Seitenflächen ſind Rechtecke; ſind aber die Seitenflächen nicht ſenkrecht auf den Grundflächen, ſo heißt es ein **ſchiefes Prisma**. Ein **dreyeckichtes Prisma** hat Dreyecke; ein **viereckichtes Prisma** vierſeitige Figuren und ein **vieleckichtes Prisma** vielſeitige Figuren oder Polygone zu Grundflächen.

**Die Höhe eines Prismas** iſt der Abſtand beyder Grundflächen in einer ſenkrechten Linie von einem

Puncte

Puncte in der obern Grundfläche zu der untern Grundfläche. Bey senkrechten Prismen fällt die senkrechte Linie oder Höhe innerhalb der untern Grundfläche; aber bey schiefen oder schrägen Prismen muß die untere Grundfläche zuweilen verlängert werden.

§. 238.

**Ein Parallelepipedum** ist ein viereckichtes Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind. **Ein rechtwinklichtes Parallelepipedum** ist ein viereckichtes senkrechtes Prisma, dessen Grundflächen Rechtecke sind. **Ein Kubus** ist ein rechtwinklichtes Parallelepipedum, dessen Grund- und Seitenflächen gleich große Quadrate sind. Hieraus folgt, daß ein Kubus von sechs gleich großen Quadraten eingeschlossen und gleich lang, hoch und breit ist. Die Seiten jedes dieser Quadrate heißen die **Seitenlinien** oder **Kanten des Kubus** (latera cubi).

§. 239.

**Aehnliche geometrische Körper** sind solche, welche von gleich vielen ähnlichen Flächen, welche nach der Ordnung gleich große körperliche Winkel bilden, eingeschlossen und begrenzt sind. **Congruente geometrische Körper** nennt man diejenigen, welche von gleich vielen und gleich großen ähnlichen Flächen, welche in gleicher Ordnung gleich große körperliche Winkel bilden, eingeschlossen sind. Diese Körper sind also

nicht

nicht allein ähnlich, sondern auch gleich. Wenn geometrische Körper sich decken sollen, so müssen sie gleich und ähnlich seyn und sind sie dies, so müssen sie sich decken. **Reguläre geometrische Körper** heißen solche, welche von gleich großen ähnlichen Flächen, welche gleiche körperliche Winkel bilden, eingeschlossen sind. Solcher Körper gibt es nur fünf: 1) der **Kubus** oder das **Hexaëder** (Fig. 221.) von 6 gleichen Quadraten; 2) das **Tetraëder** von 4 gleichen gleichseitigen Dreyecken (Fig. 208); 3) das **Octaëder** von 8 gleich großen gleichseitigen Dreyecken (Fig. 209); 4) das **Dodecaëder** von 12 gleichen regulären Fünfecken (Fig. 210); endlich 5) das **Icosaëder** von 20 gleich großen gleichseitigen Dreyecken eingeschlossen (Fig. 211).

§. 240.

**In jedem Parallelepipedum** (Fig. 212.) **sind die gegenüberliegenden Seitenflächen gleich groß,** ABCD = HGEF, BGEC = AHFD.

Weil die Grundflächen gleich große Parallelogramme sind, ABGH = DCEF (§. 238), so ist AB = HG = FE = DC (§. 74); aber DC und AB, FE und HG sind zugleich parallel (§. 235); also sind auch die Linien, welche gleiche und parallele Linien verbinden, gleich und parallel (§. 63.) d. h. AD ist = CB, FH = EG und auf eben die Art wird bewiesen, daß CB = EG und AD = HF. Da also AB = HG, DC = FE, AD = FH und BC = GE ist, so ist Paralle-

logramm ABCD = HGEF (§. 72.) und auf eben die Art wird bewiesen, daß BGEC = AHFD ist.

**Anmerk.** Hieraus folgt, daß in einem rechtwinklichten Parallelepipedum, wo die Seitenflächen auf den Grundflächen senkrecht stehen (§. 238), die gegenüberliegenden Seitenflächen gleich große Rechtecke sind, so daß ein rechtwinklichtes Parallelepipedum ein geometrischer Körper ist, welcher von lauter Rechtecken eingeschlossen ist, von denen jede zwey gegenüberliegende gleich sind.

## §. 241.

**Jeder geometrische von parallelen Flächen eingeschlossene Körper ist ein Parallelepipedum.** (Fig. 212.)

Da die parallelen Ebenen AG und DE von der Ebene AF in den Linien AH und DF geschnitten werden, so sind AH und DF parallel (§. 235); eben so werden die parallelen Ebenen BD und FG von der Ebene AF geschnitten und folglich sind auch AD und FH parallel (§. 235), also ist AHFD ein Parallelogramm (§. 69). Auf eben die Art wird bewiesen, daß die übrigen Flächen BE, AC, HE, AG und DE Parallelogramme sind. Man ziehe ferner FC und HB. Weil nun AH mit DF und AB mit DC parallel ist, so ist der Winkel BAH = CDF (§. 228), ferner AB = DC und AH = DF (§. 74.), also △ ABH

ABH = △DCF (§. 37.) und 2△ABH = 2△DCF oder Parallelogramm AG = DE. Da also in dem geometrischen Körper ABGEFD die Grundflächen AG und DE gleich groß und parallel sind und der Körper übrigens von parallelen gleich großen Parallelogrammen eingeschlossen ist, so ist er ein Parallelepipedum (§. 238).

§. 242.

**Jedes Parallelepipedum (Fig. 212.) wird durch die Diagonalfläche BCFH in zwey gleich große dreyeckichte Prismen ABCFD und BGEFC getheilt.**

Weil DCEF ein Parallelogramm ist, so ist △DCF = △FEC und eben so △ABH = △BHG (§. 74); ferner sind die gegenübertiegenden Seitenflächen gleich groß (§. 240), also AF = BE, AC = HE und FB = FB. Die beyden Prismen ABCFD und BGEFC sind also von gleich großen und ähnlichen Flächen eingeschlossen und also gleich groß oder ABCFD = BGEFC (§. 239).

§. 243.

**Wird ein Prisma AEFGC (Fig. 213.) von einer Ebene MN parallel mit den Grundflächen AC und EG geschnitten, so ist die Figur des Schnittes LHIK jeder Grundfläche AC oder EG gleich und ähnlich.**

Da die Seitenflächen des Prismas Parallelogramme sind, so ist LB eine vierseitige Figur, in der AL und BH parallel sind (§. 240). Die parallelen Ebenen AC und LI werden von der Ebene LB geschnitten, also sind AB und LH parallel (§. 235); also ist LB ein Parallelogramm und AB = LH (§. 74). Auf eben die Art wird bewiesen, daß BC = HI, CD = IK und AD = LK ist. Weil ferner AB mit LH und BC mit HI parallel ist, so ist Winkel ABC = LHI (§. 228); eben so BCD = HIK u. s. w. Also ist der Schnitt LHIK = (§. 72.) und ∽ ABCD (§. 147).

## §. 244.

**Prismen ABDC und ABFE (Fig. 214), welche auf einerley oder gleichen Grundflächen AB stehen und gleiche Höhe BD = FI haben oder zwischen parallelen Ebenen liegen, sind gleich groß oder ABDC = ABFE.**

Man lege durch beyde Prismen eine Ebene MN, die mit der Grundfläche AB parallel ist, so ist der Schnitt MG = AB (§. 243), HN = AB, also MG = HN. Da die Schnitte nun immer gleich groß sind, wie viele und wo man sie auch nehmen mag, so haben diese Prismen gleiche Länge und Breite; aber ihre Höhe ist auch gleich, weil DB = FI; also haben beyde Prismen, das senkrechte sowohl als das schiefe, gleiche Länge, Breite und Dicke, also ABDC = ABFE.

An-

**Anmerk.** Ich bin beym Beweiſe dieſes Satzes Segnern (Curſus math. Pars I. §. 258 und 273) und Kärſten (Praelectiones matheſ. theor. elem. Geom. §. 208. und deſſen Auszug Geometrie §. 296 und §. 298) gefolgt. Euklides hat einen ſtrengern aber weitläuftigern Beweis gegeben (Buch XI. Prop. 29. 30. 31.). Bonaventura Cavalieri ſah das Prisma als in Scheiben oder Schnitte von unendlich kleiner Dicke an und da ſowohl in dem ſchiefen als in dem lothrechten Prisma gleich viele und gleich große Scheiben ſeyn müſſen, ſo ſchloß er, wären die beyden Prismen gleich groß. (Cavalieri Geometria indiviſibilibus continuorum promota. Bonon. 1653). Dechales hat ausführlich die Anwendung der Methode des Cavalieri (methodus indiviſibilium) gezeigt (Curſ. math. Tom. 2. Geom. Lib. 8 et 9. p. 101-123). Daß die Geometrie dadurch leichter werde, iſt unläugbar, aber ſie wird zugleich weniger gründlich und überzeugend, weil man Linien eine unendlich kleine Breite, Flächen eine kleine Dicke zuſchreibt, Puncte als Elemente oder Theile der Linie, Linien als Theile der Fläche und Flächen als Theile des Körpers betrachtet, welches alles aber gegen die erſten Grundbegriffe der Geometrie iſt (§. 4-14).

Man ersieht aus diesem Lehrsatze, daß jedes schiefe Prisma sich in ein senkrechtes oder lothrechtes von gleicher Grundfläche, als das schiefe hat, verwandeln läßt. Dieser Satz ist ferner so allgemein, daß er nicht allein für Prismen von gleichen und ähnlichen Grundflächen, sondern auch für diejenigen gilt, bey denen bloß die Grundflächen gleich sind. So ist z. B. das fünfeckichte Prisma ABCDEF (Fig. 215.) dem dreyeckichten Prisma HIGK gleich, wenn die Grundfläche ABCDE = △ HIG und die Höhe BF = HL ist. Weil nämlich die Grundflächen gleich sind, so werden auch alle mit den Grundflächen parallele Schnitte im Quadratinhalt oder in der Ausdehnung in die Länge und Breite gleich seyn und weil überdieß noch die Höhen gleich sind, so ist Prisma ABCDEF = HIGK.

## §. 245.

**Prismen (Fig. 216.) verhalten sich bey gleichen Grundflächen, △ ABC = EFHG, wie ihre Höhen BD und FI oder ABCD : EFHGI = BD : FI.**

Man mache FK = BD und schneide das Prisma GI durch die Ebene LK parallel mit der Grundfläche GF, so ist das Prisma ABCD = GFKL (§. 244). Man theile FK in solche Theile, daß sie zugleich in FI auf-

aufgehen, daß z. B. FK 3 und FI 7 Theile erhält und geht das nicht bey der ersten Theilung, so ist es doch möglich, ein gemeinschaftliches Maaß für FK und FI zu finden, wie klein es auch immer ausfallen mag. Wenn man nun das Prisma GI aufs neue durch Ebenen durch diese Theilungspuncte auf FK und FI zerschneidet, so werden alle diese kleinen Prismen gleich groß (§. 244). Das Prisma GK besteht aus so vielen kleinen Prismen als FK Theile hat und das Prisma IG enthält ebenfalls so viele kleine Prismen als man Theile auf FI zählt; also Prisma GK : Prisma GI = FK : FI (§. 73. Arith.), aber Prisma GK = Prisma ABCD und FK = BD; also Prisma ABCD : Prisma GI = BD : FI.

## §. 246.

**Wenn ein rechtwinklichtes Parallelepipedum CABDF (Fig. 217.) durch eine Ebene HG parallel mit AE und BF geschnitten wird, so verhalten sich die abgeschnittenen Stücke des Parallelepipedums wie ihre Grundflächen oder AGH : GBF = EI : IF.**

Wenn man GH als die Grundfläche der Parallelepipeda AGH und GBF ansieht, so sind EH und HF ihre Höhen; also Parallel. AGH : Parallel. GBF = EH : HF (§. 245.) und wenn man das letzte Verhältniß mit HI multiplicirt, so ist Parallel. AGH : Parallel.

GBF = EH . HI : HF . HI (§. 74. Arith.); aber EH . HI : HF . HI = EI : IF (§. 137), also Paral. AGH : Paral. GBF = EI : IF.

§ 247.

**Prismen verhalten sich bey gleichen Höhen wie ihre Grundflächen (Fig. 218).**

1) Für rechtwinklichte Parallelepipeda. Wenn die Höhe BC = KD oder = EF, so soll bewiesen werden, daß Paral. ACB : Paral. DFE = AC : DF. Man denke sich die Grundfläche DF so weit verlängert, bis FG = AC; durch G lege man eine Ebene GL parallel mit HE und DI und verlängere die Ebenen KE, KH und IF bis an die Ebene GL, so ist EFG ein rechtwinklichtes Parallelepipedum = ACB (§. 244), weil die Grundflächen und Höhen gleich sind. Nun ist Paral. EFG : Paral. EFD = FG : FD (§. 246), aber EFG = ACB und FG = AC; also Paral. ACB : Paral. EFD = AC : DF.

2) Für jedes andere Prisma. Man denke sich ein Prisma = P, von welcher Gestalt man will, dessen Grundfläche = B und Höhe = A. Dies verwandele man in ein rechtwinklichtes Parallelepipedum ACB, dessen Grundfläche AC = B und Höhe BC = A, so daß Paral. ACB = P ist (§. 244). Ein zweytes Prisma von beliebiger Figur

sey

sey = p, die Grundfläche = b und die Höhe = A. Dies verwandele man ebenfalls in ein rechtwinklichtes Parallelepipedum EFD, dessen Grundfläche DF = b und Höhe EF = A = BC, so daß Parall. EFD = p ist. Da nun (Num. 1.) bewiesen ist, daß Parall. ACB : Parall. EFD = AC : DF, so folgt, daß P : p = B : b ist.

§. 248.

**Zwey Prismen** ABC (Fig. 219.) = P **und** DFEG = p **von ungleichen Grundflächen** AB = B **und** DEF = b **und ungleichen Höhen** BC = A **und** FG = a **sind in zusammengesetztem Verhältnisse ihrer Grundflächen und Höhen oder** P : p = A . B : a . b.

Man denke sich ein drittes Prisma HIK = π, dessen Grundfläche HI = AB = B und dessen Höhe IK = FG = a, so ist ABC : HIK = BC : IK oder P : π = A : a (§. 245.), HIK : DFEG = HI : DFE oder π : p = B : b (§. 247.) und wenn man nach der Kettenregel schließt, ABC : DFEG = BC . HI : IK . DFE oder, weil HI = AB und IK = FG, so ist ABC : DFEG = BC . AB : FG . DFE oder in allgemeinen Zeichen P : p = A . B : a . b.

§. 249.

Aus diesem Satze lassen sich folgende Schlüsse herleiten (Fig. 218):

1) Wenn Prismen, die man vergleichen will, rechtwinklichte Parallelepipeda sind, so ist ACB : DFE = AC . BC : DF . FE (§. 248), aber AC = AM . MC und DF = DH . HF (§. 86. 137); also ACB : DFE = AM . MC . BC : DH . HF . FE oder zwey rechtwinklichte Parallelepipeda sind in einem Verhältnisse, welches aus drey Verhältnissen ihrer Längen, Breiten und Höhen zusammengesetzt ist (§. 93. Arith.).

2) Wenn Kubi mit einander verglichen werden, so ist, weil Länge, Höhe und Breite gleich ist oder AM (Fig. 218.) = MC = CB und DH = HF = FE (§. 238), Kubus ACB : Kubus DFE = AM . AM . AM : DH . DH . DH = $AM^3$ : $DH^3$ oder Kubi verhalten sich wie die Kubi der Seiten oder sie sind im triplicirten Verhältniß ihrer Seiten (§ 95. Arith.).

3) Wenn die Grundflächen zweyer Prismen (Fig. 220) ähnliche Figuren sind, AC ∽ ac, so ist AC : ac = $AB^2$ : $ab^2$ (§. 207), aber ACD : acd = AC . CD : ac . cd = $AB^2$ . CD : $ab^2$ . cd oder Prismen mit ähnlichen Grundflächen verhalten sich wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten der Grundflächen multiplicirt in die Höhen und in dem Falle, daß die Höhen den Seiten der Grundflächen proportionirt sind, wie die

die Kubi der Höhen oder wie Kubi der Seiten der Grundflächen.

4) Wenn zwey Prismen gleich sind, $P = p$, aber weder die Höhen A, a, noch die Grundflächen B, b, gleich sind, so verhalten sich die Grundflächen verkehrt wie die Höhen; denn $P : p = A . B : a . b$ (§. 248), aber vermöge der Bedingung $P = p$, also $A . B = a . b$ (§. 76. Arith.), also $A : a = b : B$ (§. 79. Arith.).

5) Wenn die Höhen zweyer Prismen sich verkehrt wie die Grundflächen verhalten, so sind die Prismen gleich. Vermöge der Voraussetzung ist $A : a = b : B$, also $A . B = a . b$, aber $P : p = A . B : a . b$ (§. 248); folglich $P = p$ (§. 76. Arith.).

## §. 250.

So wie man zur Messung der Linien eine bestimmte oder gegebene Linie zum Maaßstabe wählen und zur Bestimmung der Flächen eine kleine Fläche, einen Quadratfuß, einen Quadratzoll u. s. w. zur Einheit oder Maaßstabe annehmen müßte (§. 84), eben so ist es zur Ausmessung von Ausdehnungen in die Länge, Breite und Höhe, d. h. zur Bestimmung geometrischer Körper nöthig, einen kleinen geometrischen Körper zur Einheit zu wählen und dazu ist der Kubus am bequemsten; man wählt dazu entweder einen Kubic-

zoll, d. h. einen Kubus, der Einen Zoll lang, breit und hoch ist oder einen Kubikfuß oder eine Kubikruthe u. s. w. **Den kubischen Inhalt eines Körpers finden oder ihn kubiren**, heißt finden, wie viele solcher kleinen Kubi erfoderlich sind, um genau einen rechtwinklichten parallelepipedalischen Raum, der dem gegebenen Körper gleich ist, auszufüllen. Ein Kubikfuß enthält nach dem Decimalmaaß 1000 Kubikzoll und ein Kubikzoll 1000 Kubiklinien, so daß ein Kubikfuß nach dem Decimalmaaß = 1000 Kubikzoll = 1000000 Kubiklinien ist, woraus folgt, daß zu jeder Klasse der Einheiten drey Zahlen gehören. Will man z. B. 8925367 Kubiklinien auf Kubikzoll und Kubikfuß reduciren, so schneidet man von der rechten zur linken Hand für jede Klasse 3 Zahlen ab, so daß obige Zahl = 8′925″367‴ d. h. 8 Kubikfuß 925 Kubikzoll 367 Kubiklinien ist. Nach dem Duodecimalmaaß hat der Kubikfuß 1728 Kubikzoll.

## §. 251.

**Den körperlichen Inhalt und die Oberfläche eines Kubus ABCDL (Fig. 221) zu berechnen.**

1) Man messe eine der Seiten AB und kubire dieselbe, so hat man den Inhalt des Kubus. Es sey AB = 3′, so ist des Kubus Inhalt = 27 Kubikfuß.

**Beweis.** Man theile jede Seite in drey Theile und ziehe durch die Theilungspuncte gerade Linien, so sieht man, daß die Grundfläche 9 Quadrate enthält und daß auf derselben 9 Kubi stehen können. Nun ist der Kubus ABCDL = DEFB + EGKF + GILK = 9 + 9 + 9 = 27 = $3^3$ Kubicfuß. Angenommen, daß der kleine Kubus a b c d e die Einheit sey, durch die der große Kubus ABCDL ausgemessen werden soll, so ist Kubus ABCDL : Kubus abcde = DB. CH : db. ce (§. 248.) = AB . BC . CH : ab . bc . ce = $AB^3$ : $ab^3$ (§. 238); aber Kubus abcde = 1 und $ab^3$ = 1, also Kubus ABCDL = $AB^3$.

2) Um die Oberfläche des Kubus zu finden, berechnet man die Grundfläche ABCD und multiplicirt dies, weil der Kubus von sechs gleichen Quadraten eingeschlossen ist, mit 6. Es sey AB = 3′, so ist ABCD = 9 Quadratfuß und die Oberfläche des Kubus = 9 . 6 = 54 Quadratfuß.

## §. 252.

## Den Inhalt des Prisma zu finden.

1) Man berechne den Flächeninhalt einer der Grundflächen des Prisma (§. 85. 93).

2) Man multiplicire diesen Inhalt mit der Höhe desselben. Diese Höhe ist eine der Seiten des Prisma, wenn dasselbe senkrecht ist (§. 237); ist es aber ein schiefes, so findet man die Höhe, wenn

wenn man eine senkrechte Linie von der obern auf die untere Grundfläche herabfället (§. 237).

Erstes Beyspiel.

In einem rechtwinklichten Parallelepipedum ABCDF (Fig. 213) ist die Grundfläche ABCD = 213 Quadratfuß und der Höhe BF = 24 Fuß

852
426

Parallelepipedum ABCDF = 5112 Kubicfuß.

Zweytes Beyspiel.

In einem dreyeckichten schiefen Prisma GIHK (Fig. 215) ist die Grundfl. △ GIH = 84 Quadratfuß und die Höhe HL = 9 Fuß

Prisma GHIK = 756 Kubicfuß.

**Beweis.** 1. Für das rechtwinklichte Parallelepipedum (Fig. 213). Es sey der Kubus abcdf die kubische Einheit, womit das Parallelepipedum ABCDF ausgemessen werden soll, so ist Parall. ABCDF : Parall. abcdf = AC . BF : ac . bf (§. 248), aber Kubus abcdf = 1 und ac . bf = 1 (§. 251) also Parall. ABCDF = AC . BF (§. 76. Arith.) oder dem Product aus der Grundfläche in die Höhe gleich.

2) Für das senkrechte dreyeckichte Prisma ABCFDE (Fig. 222). Man lege eine Ebene CH paral-

lel

**Beweis.** Man theile jede Seite in drey Theile und ziehe durch die Theilungspuncte gerade Linien, so sieht man, daß die Grundfläche 9 Quadrate enthält und daß auf derselben 9 Kubi stehen können. Nun ist der Kubus ABCDL = DEFB + EGKF + GILK = 9 + 9 + 9 = 27 = $3^3$ Kubicfuß. Angenommen, daß der kleine Kubus a b c d e die Einheit sey, durch die der große Kubus ABCDL ausgemessen werden soll, so ist Kubus ABCDL : Kubus abcde = DB. CH : db. ce (§. 248.) = AB . BC . CH : ab . bc . ce = $AB^3$ : $ab^3$ (§. 238); aber Kubus abcde = 1 und $ab^3$ = 1, also Kubus ABCDL = $AB^3$.

2) Um die Oberfläche des Kubus zu finden, berechnet man die Grundfläche ABCD und multiplicirt dies, weil der Kubus von sechs gleichen Quadraten eingeschlossen ist, mit 6. Es sey AB = 3′, so ist ABCD = 9 Quadratfuß und die Oberfläche des Kubus = 9 . 6 = 54 Quadratfuß.

## §. 252.

## Den Inhalt des Prisma zu finden.

1) Man berechne den Flächeninhalt einer der Grundflächen des Prisma (§. 85. 93).

2) Man multiplicire diesen Inhalt mit der Höhe desselben. Diese Höhe ist eine der Seiten des Prisma, wenn dasselbe senkrecht ist (§. 237); ist es aber ein schiefes, so findet man die Höhe,

wenn

rimeter der Grundfläche AB + BC + CA mit der Höhe AE. Das Product ist der Inhalt aller Seitenflächen, wozu man noch den Quadratinhalt beyder Grundflächen ABC und DEF zu addiren hat, um die Oberfläche des ganzen Prisma zu erhalten.

**Beweis.** Wenn man die Seitenflächen eines Prisma auf einer Fläche ausbreitet, so entsteht das Rechteck FC = FA + AD + DC = CA . AE + AB . AE + BC . AE = (CA + AB + BC) . AE.

2) Ist das Prisma schief, wie ABCDEFGH (Fig. 224), so schneide man eine der Seitenflächen desselben mit der Ebene IKLM, welche auf derselben senkrecht ist, so daß IM senkrecht auf DE, KL senkrecht auf AH u. s. w. ist (§. 230); also Parallelogramm EC = DE . MI; FB = DE . IK; BH = DE . LK; AE = DE . LM; also die Summe der Seitenflächen = (MI + IK + KL + LM). DE oder der Inhalt aller Seitenflächen wird gefunden, wenn man eine dergleichen Seiten des Prisma z. B. DE mit dem Perimeter eines Schnitts multiplicirt, welcher senkrecht auf den Seitenflächen stehe. Hierzu addirt man nun noch den Inhalt beyder Grundflächen. Es sey MI = 8′, IK = 5′, KL = 7′ und LM = 4′, so ist der Perimeter des Schnitts MIKL = 8′ + 5′ + 7′ + 4′

=

= 24. Es sey ferner DE = 20' so beträgt der Inhalt der Seitenflächen 24 . 20 = 480 Quadratfuß, wozu nun noch der Inhalt der beyden Grundflächen addirt werden muß.

## Drittes Kapitel.

### Vom Cylinder, der Pyramide und dem Kegel.

§. 254.

**Ein Cylinder** ist ein geometrischer Körper, der oben und unten von zwey gleich großen und parallelen Kreisflächen, an den Seiten aber von einer zusammenhängenden krummen Fläche von der Beschaffenheit, daß jede gerade Linie, welche auf derselben mit derjenigen Linie, welche durch die Mittelpuncte beyder Kreisflächen geht, parallel ist, ganz in derselben liegt, begrenzt ist.

**Die Grundflächen des Cylinders** sind die obere und untere Kreisfläche. Die Achse des Cylinders ist eine gerade Linie, welche die Mittelpuncte beyder Kreisflächen verbindet. Die Höhe des Cylinders ist jede gerade Linie, welche von einem Puncte in der obern Kreisfläche senkrecht auf die untere Kreisfläche herabfällt. Ein senkrechter Cylinder ist derjenige, dessen Achse senkrecht auf den Grundflächen stehet. Ein

schräger

schräger oder schiefer Cylinder wird derjenige genannt, dessen Achse nicht auf den Grundflächen senkrecht ist. Der senkrechte (nicht aber der schiefe) Cylinder entsteht, wenn sich ein Rechteck um seine eine Seite drehet.

§. 255.

Wenn ein Cylinder ABCD (Fig. 225.) durch eine Ebene IH parallel mit der Grundfläche AB oder CD geschnitten wird, so ist der Schnitt ein Kreis IH.

Man schneide den Cylinder durch eine Ebene ABCD durch die Achse EF, so werden, weil die Ebenen AB und CD parallel sind (§. 254), ebenfalls die Linien AB und CD parallel seyn (§. 235.) und die Linien AD und BC, welche die gleich großen und parallelen Linien AB und CD verbinden, müssen gleichfalls gleich groß und parallel seyn (§. 63); also ist ABCD ein Parallelogramm (§. 69); gleichfalls sind AK und BK Parallelogramme, IK = AE und HK = EB (§. 74.) und da AE = EB (§. 14), so ist IK = KH. Nun schneide man den Cylinder durch eine andere Ebene EGMF durch die Mittelpuncte, so ist aus den vorher angeführten Gründen KEGL ein Parallelogramm, EG = KL (§. 74); aber AE = EG = EB = KH, also IK = KL = KH und da sich dasselbe von jedem andern Schnitt als EGMF beweisen läßt, so folgt, daß die Linien aus dem Puncte K bis an die krumme Linie ILH

gleich

gleich groß seyn müssen. Der Schnitt IH ist also ein Kreis (§. 13), dessen Mittelpunct K ist, wo die Achse des Cylinders EF den Schnitt IH trifft.

§. 256.

**Zwey Cylinder BD und DE (Fig. 226), welche auf einer und derselben oder auf gleich großen Grundflächen DC stehen und gleiche Höhen BC = EF haben, sind gleich groß.**

Man schneide beyde Cylinder durch eine Ebene GHIK parallel mit den Grundflächen, so ist der Kreis GH = DC = IK (§. 255), also haben beyde Cylinder allenthalben gleiche Ausdehnung nach der Länge und Breite und weil BC = EF ist, so haben sie auch gleiche Ausdehnung nach der Höhe, also ist Cylinder BD = Cylinder DE.

§. 257.

Man nenne einen Cylinder = C, dessen Grundfläche = B und die Höhe = A; einen andern Cylinder = c, dessen Grundfläche = b und Höhe = a und wende die für Prismen gegebenen Beweise (§. 245-250.) an, so folgt:

1) Bey gleichen Grundflächen B = b verhalten sich die Cylinder wie ihre Höhen: C : c = A : a (§. 245).

2) Bey gleichen Höhen A = a verhalten sich die Cylinder wie die Grundflächen, C : c = B : b (§. 247).

3) Bey ungleichen Höhen und ungleichen Grundflächen sind die Cylinder im zusammengesetzten Verhältniß ihrer Grundflächen und Höhen, C : c = A . B : a . b (§. 248).

4) Man nenne den Durchmesser der Grundfläche B = D und den Durchmesser der Grundfläche b = d. Nun verhalten sich Kreisflächen wie die Quadrate ihrer Durchmesser oder B : b = $D^2 : d^2$ (§. 209. Num. 4.); aber C : c = A . B : a . b, also C : c = $A . D^2 : a . d^2$ oder Cylinder sind im zusammengesetzten Verhältniß ihrer Höhen und der Quadrate der Durchmesser der Grundflächen.

5) Verhalten sich die Höhen wie die Durchmesser der Grundflächen (in welchem Fall man die Cylinder ähnlich nennen kann), so ist A : a = B : b und C : c = $D^3 : d^3 = A^3 : a^3$, oder in diesem Fall verhalten sich die Cylinder wie die Kubi der Durchmesser der Grundflächen oder wie die Kubi der Höhen.

## §. 258.

### Den körperlichen Inhalt eines Cylinders zu berechnen.

1) Man messe den Durchmesser der Grundfläche DC (Fig. 226.) und berechne daraus den Inhalt derselben (§. 195).

2)

2) Diesen Inhalt multiplicire man mit der Höhe BC, wenn der Cylinder senkrecht ist, wie ABCD oder mit EF, wenn es ein schiefer Cylinder ist, wie DCE, so hat man den Inhalt des Cylinders. Z. B. es sey CD = 10′ und BC oder EF = 30′, so ist die Grundfläche CD = 0,7850 . 100 = 78,5400 Quadratfuß und der Cylinder DB oder DE = 78,54 . 30 = 235,620 Kubicfuß.

**Beweis.** In der obern und untern Grundfläche denke man sich ein Polygon von so unendlich vielen und kleinen Seiten, daß der Unterschied derselben von den Kreisen kleiner als jede gegebene endliche Größe ist (§. 177), so kann der Unterschied zwischen dem Cylinder und dem vielseitigen Prisma, welches man sich auf dieser Grundfläche denken kann, auch nicht größer seyn. Den Inhalt des Prisma aber findet man durch die Multiplication der Grundfläche mit der Höhe (§. 252); also auch auf eben die Art den kubischen Inhalt des Cylinders.

§. 259.

**Den Inhalt eines senkrechten Cylinders ABDC (Fig. 227), von welchem ein Stück abgeschnitten ist, zu finden.**

Man multiplicire die Grundfläche AB = B mit der halben Summe der größten und kleinsten Höhe oder mit $\frac{1}{2}$ BD + $\frac{1}{2}$ AC, so hat man den kubischen Inhalt von ABDC.

**Beweis.** Man ergänze den fehlenden oder abgeschnittenen Theil, indem man durch D eine Kreisfläche legt, die gleich AB und mit AB parallel ist, und durch C lege man eine zweyte Kreisfläche mit AB parallel: so ist Cylinder ABHC = B . BH und CHDG = B . DH, also $\frac{1}{2}$ CHDG = CHD = B . $\frac{1}{2}$ DH; also ABHC + CHD = ABDC = B . BH + B . $\frac{1}{2}$ DH = B . (BH + $\frac{1}{2}$ DH) = B . $\left(\frac{2\,BH + DH}{2}\right)$ = B . $\left(\frac{BH + BH + DH}{2}\right)$, aber BH = AC und BH + DH = BD, also ABDC = B . $\left(\frac{AC + BD}{2}\right)$.

**Anmerk.** Wenn unten bey A ein Stück vom Cylinder abgeschnitten wäre, so sieht man leicht, würde die Auflösung dieselbe bleiben.

## §. 260.

**Die Oberfläche eines senkrechten Cylinders ABCD (Fig. 226.) zu berechnen.**

1) Man messe den Durchmesser der Grundfläche DC und berechne daraus die Peripherie derselben = π . DC (§. 191).

2) Diese multiplicire man mit der Höhe BC, so hat man die runde Oberfläche des Cylinders.

3) Dazu addire man den Quadratinhalt der beyden Grundflächen, so hat man die ganze Oberfläche des Cylinders. Es sey DC = 10′, so ist π . DC

=

$= 3,141 . 10 = 31,41'$; die Höhe BC sey $=$ $50'$, so ist die krumme Oberfläche $= 31,41 . 30$ $= 942,30$ Quadratfuß, wozu man noch 157,05 Quadratfuß für die beyden Grundflächen addiren muß, um die ganze Oberfläche des Cylinders $= 1199,35$ Quadratfuß zu erhalten.

**Beweis.** Man sieht leicht ein, daß wenn die krumme Oberfläche des Cylinders, gleichsam ausgewickelt und ausgestreckt auf einer Fläche läge, dieselbe ein Rechteck seyn würde, dessen gegenüberstehende Seiten die Peripherien der beyden Grundflächen und die beyden Höhen des Cylinders sind.

**Anmerk.** Will man die Oberfläche eines schiefen Cylinders ABCD (Fig. 228.) finden, so muß man auf die Seitenlinie AD eine senkrechte Fläche EF setzen und mit der Peripherie von EF die Seitenlinie AD oder BC multipliciren, welches Verfahren aus demjenigen erhellet, was bey der Bestimmung der Oberfläche eines schiefen Prisma (§. 253) gesagt worden ist. Da aber der Schnitt EF kein Kreis, sondern eine Ellipse ist, deren Berechnung so wie die Bestimmung der Peripherie derselben außerhalb der Grenzen der Elementar-Geometrie liegt, so kann davon nur die höhere Geometrie Rechenschaft geben.

§. 261.

**Die cylindrische Oberfläche eines senkrechten Cylinders ABDC (Fig. 227) von welchem oben ein Stück abgeschnitten ist, zu bestimmen.**

Man nehme die Mittelzahl zwischen der größten Höhe BD und der kleinsten AC und multiplicire damit die Peripherie der Grundfläche AB = p, so ist das Product die cylindrische oder krumme Oberfläche.

Beweis. Oberfläche ABHC = p . AB (§. 250), CHDG = p . DH und $\frac{1}{2}$ CHDG = CHD = p . $\frac{HD}{2}$ also die Summe beyder Theile d. h. die Oberfläche von ABCD = p . AC + p . $\frac{HD}{2}$ = p . $\left(\frac{2\,AC + HD}{2}\right)$; aber 2 AC = AC + AC = AC + HB, also Oberfläche von ABDC = p . $\left(\frac{AC + HB + HD}{2}\right)$ = p . $\left(\frac{AC + BD}{2}\right)$.

§. 262.

**Eine Pyramide ist ein geometrischer Körper, dessen Grundfläche eine geradlinichte ebene Figur ist, und an den Seiten von so vielen Dreyecken eingeschlossen ist, als die Figur Seiten hat. Die Spitzen der Dreyecke laufen alle in einen Punct zusammen, der die Spitze der Pyramide heißt. Die Dreyecke heißen die Seitenflächen der Pyramide.** Nach der Anzahl

zahl der Seiten der Grundfläche der Pyramide oder nach der Anzahl der Seitenflächen derselben nennt man die Pyramide **dreyeckicht**, **viereckicht** u. s. w. und **vieleckicht**.

**Eine senkrechte Pyramide** ist diejenige, deren Grundfläche eine reguläre Figur ist, die sich in einen Kreis beschreiben läßt, und deren Spitze in der senkrechten im Mittelpuncte des Kreises errichteten Linie liegt, woraus folgt, daß alle Seitenflächen gleichschenklichte und gleich große Dreyecke sind. Im entgegengesetzten Falle heißt die Pyramide, **schief**.

§. 263.

**Wenn eine Pyramide** (Fig. 229.) **durch eine Ebene geschnitten wird, welche parallel mit der Grundfläche ist, so ist der Schnitt eine kleinere der Grundfläche ähnliche Figur** BCDEF ∽ GHIKL **und diese Figuren verhalten sich wie** $AC^2 : AH^2 = AD^2 : AI^2 = AE^2 : AK^2$.

1) Weil die Flächen GIK und BDE parallel sind und von den Seiten der Pyramide geschnitten werden, so sind die Schneidungslinien parallel, GH mit BC, HI mit CD, IK mit DE u. s. w. (§. 235.), also △ AGH ∽ △ ABC, △ AHI ∽ △ ACD, △ AIK ∽ △ ADE und BC : GH = AC : AH (§. 148), aber AC : AH = CD : HI, also BC : GH = CD : HI (§. 77. Arith.)

Arith.) und BC : CD = GH : HI (§. 81. Arith.); weil aber GH mit BC und HI mit CD parallel ist, so sind die von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich BCD = GHI (§. 128). Auf eben die Art wird bewiesen, daß alle andere Seiten proportionirt sind, DC : DE = HI : IK und die von den proportionirten Seiten eingeschlossenen Winkel gleich sind, HIK = CDE u. s. w. also BCDEF ∽ GHIKL (§. 147).

2) Weil diese Figuren nun ähnlich sind, so verhalten sie sich wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten (§. 280), BCDEF : GHIKL = $BC^2$ : $GH^2$, aber BC : GH = AC : AH (§. 148) und $BC^2 : GH^2 = AC^2 : AH^2$, (§. 89. Arith.) = $AD^2 : AI^2 = AE^2 : AK^2$; also BCDEF : GHIKL = $AC^2 : AH^2 = AD^2 : AI^2 = AE^2 : AK^2$.

## §. 264.

**Ein Kegel** ist ein geometrischer Körper, dessen Grundflächen Kreise sind und der an den Seiten von einer krummen Oberfläche eingeschlossen ist, welche in eine Spitze, **die Spitze des Kegels** genannt, zusammenläuft. Diese krumme Oberfläche ist von der Beschaffenheit, daß jede von der Spitze des Kegels zu einem Puncte in der Peripherie der Grundfläche gezogene gerade Linie ganz in der Oberfläche liegt. Jede dieser geraden Linien heißt die **Seite des Kegels.**

Die

**Die Achse des Kegels** ist die von der Spitze des Kegels zum Mittelpunct der Grundfläche gezogene gerade Linie. Aus den vorherigen Erklärungen ersieht man leicht, daß wenn der Kegel durch eine durch die Achse desselben gelegte Ebene geschnitten wird, der Schnitt ein Dreyeck ist, dessen Grundlinie der Durchmesser des Kreises und dessen Seiten die Seiten des Kegels sind.

**Ein senkrechter Kegel** ist derjenige, dessen Achse senkrecht auf der Grundfläche steht. **Ein schiefer Kegel** heißt ein solcher, dessen Achse nicht senkrecht, sondern schief auf der Grundfläche steht.

## §. 265.

**Wenn ein Kegel** ABC (Fig. 230) **durch eine Ebene** EF **parallel mit der Grundfläche** BC **geschnitten wird, so ist der Schnitt** EF **ein Kreis, welcher sich zur Grundfläche verhält wie** $AE^2 : AB^2 = AK^2 : AG^2$.

1) Man stelle sich vor, daß der Kegel mit dem Dreyeck ABC durch die Achse AG und noch mit einem andern Dreyeck AGH geschnitten werde. Da nun die beyden parallelen Ebenen EF und BC von einer dritten Ebene BCFE geschnitten werden, so sind die Schneidungslinien EF und BC parallel (§. 235); aus gleicher Ursache ist KI parallel mit GH, also $\triangle$ EKA $\sim$ $\triangle$ BGA und

BG : EK = AG : AK (§. 148); eben so △ IKA ∽ △ HGA und HG : KI = AG : AK, also BG : EK = HG : KI; aber die Grundfläche ist ein Kreis, in welchem BG = GH (§. 14), also auch EK = KI (§. 76. Arith.)

Ferner △ CGA ∽ △ FKA und CG : FK = AG : AK (§. 148), also HG : KI = CG : FK, aber HG = CG, also FK = KI = EK und der Schnitt EF ist ein Kreis (§. 15).

2) △ EKA ∽ △ BGA und EK : BG = AE : AB = AK : AG, also $EK^2 : BG^2 = AE^2 : AB^2$ (§. 89. Arith.) $= AK^2 : AG^2$; aber Kreis EF : Kreis BC = $EK^2 : BG^2$ (§. 209.); also Kreis EF : Kreis BC = $AE^2 : AB^2 = AK^2 : HG^2$.

## §. 266.

Hieraus folgt:

1) Die Peripherien dieser Schnitte verhalten sich wie AE : AB; denn EK : BG = AE : AB, aber EK : BG = Peripherie EF : Peripherie BC (§. 181), also Peripherie EF : Peripherie BC = AE : AB.

2) Die Kreisschnitte verhalten sich wie das Quadrat des abgeschnittenen Theils der Achse zum Quadrat der Achse selbst oder = $AK^2 : AG^2$; denn EK : BG = AK : AG und $EK^2 : BG^2 = AK^2 : AG^2$; aber Kreis EF : Kreis BC = $EK^2 :$

$BG^2$

$BG^2$ (§. 209), also Kreis EF : Kreis BC = $AK^2 : AG^2$.

## §. 267.

**Pyramiden und Kegel** (Fig. 231.) **von gleichen Grundflächen** BC = EF **und gleichen Höhen, d. h. deren Spitzen** A **und** D **in einer mit den Grundflächen parallelen Ebene** AD **liegen, sind gleich groß oder** BCA = EFD.

Man schneide beyde durch eine Ebene NO, welche mit den Grundflächen oder der Ebene durch die Spitzen parallel ist und GH und IK mögen die Figuren der Schnitte seyn, so ist AG : AB = DI : DE (§. 236.) und $AG^2 : AB^2 = DI^2 : DE^2$ (§. 89. Arith.); aber GH : BC = $AG^2 : AB^2$ (§. 263.) und IK : EF = $DI^2 : DE^2$ (§. 265); also GH : BC = IK : EF, aber BC = EF (Beding.), also GH = IK (§. 76. Arith.). Auf eben die Art läßt sich beweisen, daß die durch parallele Ebenen an jedem andern Orte abgeschnittenen Stücke der Pyramide und des Kegels gleich und ihre Ausdehnungen in die Länge und Breite gleich sind. Aber weil vermöge der Voraussetzung auch die Ausdehnung derselben in die Höhe gleich ist, so muß der körperliche Raum derselben gleich oder Pyramide ABC = Kegel EDF seyn.

**Anmerk.** Man ersiehet aus diesem Beweise, daß zwey Pyramiden oder zwey Kegel, welche auf gleichen

gleichen Grundflächen stehen und deren Spitzen in einer mit den Grundflächen parallelen Ebene liegen, gleich groß sind und daß jeder schiefe Kegel in einen gleich großen senkrechten Kegel verwandelt werden kann.

§. 268.

**Jedes dreyeckichte Prisma** ACBEDF (Fig. 232.) **läßt sich in drey gleiche dreyeckichte Pyramiden zerlegen.**

Man ziehe AF, CF und CE, so entstehen drey dreyeckichte Pyramiden ABFC, EAFC und CDEF. Nun ist ABFE ein Parallelogramm (§. 237), also △ ABF = △ EAF (§. 74); also stehen die Pyramiden ABFC und EAFC auf gleichen Grundflächen und stoßen in Eine Spitze C zusammen; sie sind also gleich groß oder ABFC = EAFC (§. 267.) oder = ACEF. Ferner stehen auf gleichen Grundflächen ACE = ECD die Pyramiden, welche in F zusammenstoßen, also ACEF und CDEF (§. 267); also sind die drey dreyeckichten Pyramiden, in welche sich das Prisma zerlegen läßt, unter sich gleich groß oder ACEF = CDEF = BAFC.

§. 269.

Aus diesem Lehrsatze lassen sich folgende Sätze herleiten:

1) Da sich jedes dreyeckichte Prisma in drey gleiche dreyeckichte Pyramiden zerlegen läßt, so ist jede drey-

dreyeckichte Pyramide der dritte Theil eines dreyeckichten Prisma von gleicher Höhe und gleicher Grundfläche mit der Pyramide.

2) Da jede Pyramide, welche eine vierseitige oder vielseitige Figur zur Grundfläche hat, sich in dreyeckichte Pyramiden zerlegen läßt, so folgt, daß jede Pyramide der dritte Theil eines Prisma von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe mit der Pyramide ist.

3) Da eine Pyramide und ein Kegel von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen gleich groß sind (§. 267.) und die Pyramide der dritte Theil des Prisma ist, so muß auch der Kegel der dritte Theil eines Cylinders von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe mit dem Kegel seyn; nämlich Kegel ABE (Fig. 233.) $=$ $\frac{\text{Cylinder ABCD}}{3}$

4) Man denke sich zwey Pyramiden P und p oder zwey Kegel K und k, deren Grundflächen B und b und deren Höhen A und a sind, so sind, weil Prismen und Cylinder im zusammengesetzten Verhältniß ihrer Grundflächen und Höhen sind (§. 249. 257.), auch die Drittheile derselben, d. h. die Pyramiden und Kegel in demselben Verhält-

niß

niß oder $P : p = K : k = \frac{A \cdot B}{3} : \frac{a \cdot b}{3} = A \cdot B : a \cdot b$ (§. 74. Arith.).

5) Sind, wie bey Kegeln, die Grundflächen ähnliche Figuren, nämlich die Kreise B und b, so verhalten sich die Körper z. B. die Kegel wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten (§. 208.) oder der Durchmesser $D^2 : d^2$ (§. 209); also $B : b = D^2 : d^2$, woraus folgt: $P : p = K : k = A \cdot D^2 : a \cdot d^2$.

6) Sind zwey Kegel ähnlich, d. h. verhalten sich die Durchmesser der Grundflächen wie die Seiten oder Höhen oder $AB : ab = BE : be = EF : ef$ (Fig. 233), so sind sie im triplicirten Verhältniß dieser Linien oder verhalten sich wie die Kubi dieser Linien; denn die Grundflächen

$B : b = \left\{\begin{matrix} AB : ab \\ AB : ab \end{matrix}\right.$ (§. 94. Arith.)

$A : a = EF : ef = BE : be = AB : ab$

$A \cdot B : ab = K : k = AB^3 : ab^3 = EF^3 : ef^3 = BE^3 : be^3$ (§. 87. Arith.)

## §. 270.

**Den kubischen Inhalt einer Pyramide oder eines Kegels zu berechnen.**

1) Man berechne den Quadratinhalt der Grundfläche (§. 85-92).

2) Die-

2) Diesen multiplicire man mit dem dritten Theile der Höhe, weil die Pyramide oder der Kegel der dritte Theil eines Prisma oder Cylinders von gleichen Grundflächen und Höhen mit jenen sind (§. 269). Z. B. im Kegel ABE (Fig. 233.) ist AB = 8′, FE = 15′, folglich die Grundfläche AB = 3,141 . AF² = 3,141 . 16 = 50,256 Quadratfuß und der Kegel = 50,256 . $\frac{15}{3}$ = 50,256 . 5 = 251,28 Kubicfuß.

## §. 271.

## Den kubischen Inhalt eines senkrechten abgekürzten Kegels ABCD (Fig. 234.) zu finden.

### Erste Methode.

Es ist klar, daß wenn man die Höhe EF des abgeschnittenen Stücks ABE finden könnte, man nur den ganzen Kegel EDC zu berechnen und davon ABE zu subtrahiren brauchte, um den Inhalt des abgekürzten Kegels zu erhalten. Um EF zu finden, ziehe man AH senkrecht auf DC, so ist DH = DG — HG = DG — AF und AH = FG ist die Höhe des abgekürzten Kegels. Weil AB mit DC parallel ist (§. 235.) und AH mit FG, so ist △ DHA ∽ △ AFE, also DH : AH = AF : FE (§. 148.) oder DG — AF : FG = AF : FE, also FE = $\frac{FG \cdot AF}{DG - AF}$ (§. 98. Arith.). Es sey DG = 18′, AF = 10′ und FG = 12′, so ist DH : AH = AF : FE oder 8 : 12 = 10 : FE; also FE

=

$= \frac{120}{8} = 15'$ und $EG = FG + FE = 12 + 15 = 27'$.

| | | |
|---|---|---|
| Kreis AB | = 3,141 . 100 = | 314,1 Quadratfuß |
| $\frac{1}{3}$ EF | = $\frac{15}{3}$ = | 5 |
| Kegel ABE | = | 1570,5 Kubicfuß. |
| Kreis DC | = 3,141 . 324 = | 1017,684 Quadratfuß |
| $\frac{1}{3}$ EG | = $\frac{27}{3}$ = | 9 |
| Kegel DCE | = | 9159,156 Kubicfuß |
| Kegel ABE | = | 1570,5 |

der abgekürzte Kegel ABCD = 7588,656 Kubicfuß.

## Zweyte Methode.

1) Man suche die Kubi der Halbmesser der obern und untern Grundfläche $DG^3$ und $AF^3$ und nehme deren Unterschied $DG^3 - AF^3$.

2) Diesen Unterschied multiplicire man mit dem Product aus der Höhe in $\frac{1}{3}\pi$ (§. 190.) $= \frac{1}{3}\pi . AH . (DG^3 - AF^3)$.

3) Dieses Product dividire man durch den Unterschied des größern und kleinern Halbmessers DG — AF, so ist der Quotient $\frac{\frac{1}{3}\pi . AH . (DG^3 - AF^3)}{DG - AF}$ der kubische Inhalt des abgekürzten Kegels ABCD.

**Beweis.** Aus dem, was bey der ersten Auflösung erwiesen ist, ersieht man, daß $\frac{FG . AF}{DG - AF} =$ FE.

FE. Im Kegel EAB ist der Kreis AB $= \pi . AF^2$ (§. 196) und der Inhalt des Kegels EAB $= \pi . AF^2$ $\frac{1}{3}$ FE $= \frac{\frac{1}{3}\pi . AF^2 FG . AF}{DG - AF} = \frac{\frac{1}{3}\pi . FG . AF^3}{DG - AF}$. Man kann nun EG durch folgende Proportionen finden: DH : AH $=$ DG : EG oder DG $-$ AF : FG $=$ DG : GE, also GE $= \frac{FG . DG}{DG - AF}$. Der Kreis DC $= \pi . DG^2$ (§. 196) und der Kegel EDC $= \pi .$ $DG^2 \frac{1}{3}$ GE (§. 270) $\frac{\frac{1}{3}\pi DG^2 FG . DG}{DG - AF} = \frac{\frac{1}{3}\pi . DG^3 . FG}{DG - AF}$. Also EDC $-$ EAB $=$ ABCD $= \frac{\frac{1}{3}\pi . FG . DG^3}{DG - AF} - \frac{\frac{1}{3}\pi . FG . DG^3}{DG - AF} = \frac{\frac{1}{3}\pi . FG . (DG^3 - AF^3)}{DG - AF} = \frac{\frac{1}{3}\pi . FG . (DG^3 - AF^3)}{DG - AF}$. Nennt man nun DG $=$ R, AF $=$ r, FG $=$ A, so ist in kürzern Ausdrücken ABCD $= \frac{\frac{1}{3}\pi . A . (R^3 - r^3)}{R - r}$. Es sey DG $= 18'$, AF $= 10,'$ FG $= 12'$, so ist $\frac{1}{3}\pi = \frac{3,141}{3} = 1,047$; $\frac{1}{3}\pi A = 1,047 . 12 = 12,564$; $DG^3 = 18^3 = 5823$; $AF^3 = 1000$; also $DG^3 - AF^3 = 5832 - 1000 = 4832$; folglich ABCD $= \frac{12,564 . 4832}{18 - 10} = \frac{60709,248}{8} = 7588,656$ Kubicfuß, dasselbe, was auch die erste Auflösung gab.

Anmerk. Man sieht leicht ein, daß die erste Methode der Auflösung bey Berechnung des kubischen Inhalts einer abgekürzten senkrechten Pyramide angewandt werden könne.

## §. 272.

### Die Oberfläche einer Pyramide zu finden.

1) Ist es eine schiefe Pyramide und keine der Seitendreyecke ABC, ACD, ADE u. s. w. (Fig. 229) weder in Absicht der Höhen noch der Grundlinien gleich groß, so muß man von der Spitze A senkrechte Linien auf BC, CD, DE u. s. w. fällen und diese mit $\frac{1}{2}$ BC, $\frac{1}{2}$ CD, $\frac{1}{2}$ DE u. s. w. multipliciren. Dadurch erhält man den Inhalt aller Seitendreyecke, welche nebst der Grundfläche BCDEF die Oberfläche der ganzen Pyramide ausmachen.

2) Ist die Pyramide senkrecht wie ABCDE (Fig. 235), so multiplicirt man den Perimeter der Grundfläche mit der halben Höhe GE eines dieser Seitendreyecke, so hat man den Inhalt aller Seitenflächen der Pyramide, wozu nun noch die Grundfläche addirt werden muß.

Beweis. Die Pyramide ist senkrecht, daher EF senkrecht auf der Grundfläche (§. 262) und also auch auf den Linien DF, AF, FB u. s. w. (§. 223) und alle Winkel bey F sind rechte Winkel. Außer dem rechten

Winkel

Winkel bey F. ist DF = AF = FB u. s. w. (§. 262) und FE gemeinschaftlich; also △ EFD = △ EFA = △ EFB u. s. w. und ED = EA = EB u. s. w. und da überdies die Grundlinien gleich sind, DA = AB = BC u. s. w., so sind alle Seitendreyecke gleich groß, △ EDA = △ EAB = △ EBC u. s. w.; also haben die Dreyecke auch gleiche Höhe = EG und der Inhalt derselben ist = △ ABE + △ BCE + △ CDE + △ ADE = AB . ½ EG + BC . ½ EG + CD . ½ GE + DA . ½ GE = (AB + BC + CD + DA) . ½ GE d. h. der Perimeter multiplicirt mit der halben Höhe eines dieser Dreyecke, z. B. ½ GE.

## §. 273.

**Die Oberfläche eines senkrechten Kegels ABC (Fig. 236) zu finden.**

1) Aus dem Durchmesser des Kreises berechne man die Peripherie = 3,141 . BC.

2) Diese Peripherie multiplicire man mit der halben Seite des Kegels AB, so hat man den Quadratinhalt der konischen Oberfläche, wozu man nun noch den Quadratinhalt der Grundfläche addirt.

**Beweis.** In einem senkrechten Kegel ist AK senkrecht auf der Grundfläche BC (§. 264) und auf jeder Linie in derselben KB, KC (§. 216); Ferner KB = KC und AK = AK; also sind alle Seiten des Kegels gleich, AB = AC (§. 37). Wenn man daher die krumme Oberfläche des Kegels ausbreitet, so ent-

ſtehe ein Sector GHI (Fig. 237), deſſen Radius GH = GI = AB und deſſen Bogen HI der Peripherie der Grundfläche BC gleich iſt. Denkt man ſich nun ein Dreyeck DEF (Fig. 238), deſſen Grundlinie EF = Bog. HI = Peripherie von BC und deſſen Höhe DE = GH = AB iſt, ſo iſt die koniſche Oberfläche des Kegels ABC = Sector GHI = △ DEB = EF . $\frac{1}{2}$ DE = Peripherie von BC . $\frac{1}{2}$ AB.

## §. 274.

### Die Oberfläche eines abgekürzten Kegels zu berechnen (Fig. 236).

1) Man berechne die Peripherie der obern und untern Grundfläche LM und BC.

2) Dieſe beyden Peripherien addire man, nehme davon die Hälfte und multiplicire dieſe mit der Seite LB des abgekürzten Kegels, ſo hat man die krumme Oberfläche deſſelben, wozu man nun noch den Quadratinhalt der beyden Grundflächen addiren muß.

**Beweis.** Nach dem beym vorigen Satze gegebenen Beweiſe iſt die Oberfläche des Kegels ABC = Sector GHI = △ DEF (§. 273). Man mache nun GN = DP = AL, beſchreibe aus G den Bogen NO und ziehe PQ parallel mit EF, ſo iſt AB : AL = BC : LM (§. 148) = Peripherie BC : Peripherie LM (§. 181) = HI : NO (§. 181. Num 3.) = EF :

PQ

PQ (§. 148). Weil nun Peripherie BC = HI = EF ist (vermöge der Construction), so ist Peripherie LM = NO = PQ; also die Oberfläche des Kegels ALM = GNO = △DPQ und die Oberfläche des abgekürzten Kegels BCML = HION = EFQP = $\left(\frac{PQ+EF}{2}\right)$ . PE (§. 92) = $\left(\frac{\text{Periph LM}+\text{Periph. BC}}{2}\right)$ . LB.

Es sey BC = 40′, LM = 20′, LB = 9′, so ist die Peripherie BC = 3,141 . 40 = 125,64 und Peripherie LM = 3,141 . 20 = 62,82; also $\left(\frac{125,64+62,82}{2}\right)$ . 9 = 94,23 . 9 = 848,07 Quadratfuß.

§. 275.

Aus dem, was im Vorhergehenden von der Berechnung der Oberflächen geometrischer Körper gesagt worden ist, folgt:

1) **Prismatische und cylindrische Oberflächen** (d. h. die Grundflächen nicht mitgerechnet) **sind im zusammengesetzten Verhältniß der Perimeter oder Peripherien der Grundflächen und der Höhen oder verhalten sich wie die Rechtecke dieser Linien** (§. 86); denn man findet sie, wenn man die Peripherien der Grundflächen mit den Höhen multiplicirt (§. 253. 260), unter der Voraussetzung, daß die Prismen und Cylinder senkrecht sind.

2) Pyramidalische Oberflächen senkrechter Pyramiden sind Dreyecke, deren Grundlinien die Perimeter der Grundflächen und deren Höhe die Höhe eines der Seitendreyecke ist (§. 272); aber diese Dreyecke sind im zusammengesetzten Verhältniß ihrer Grundlinien und Höhen (§. 139); **also sind die Oberflächen der Pyramiden** (ohne die Grundflächen) **im zusammengesetzten Verhältniß der Perimeter der Grundflächen und der Höhen eines der Dreyecke.**

3) Gleichfalls sind konische Oberflächen senkrechter Kegel im zusammengesetzten Verhältniß der Peripherien der Grundflächen und der Seiten der Kegel (§. 273).

4) **Wenn geometrische Körper ähnlich sind,** d. h. wenn die Grundflächen ähnliche Figuren sind und die Höhen sich wie die Seiten der Grundflächen verhalten, **so verhalten sich die Oberflächen O und o** (ohne die Grundflächen) **wie die Quadrate ähnlich liegender Linien A und a.** Man nenne eine Seite der Grundfläche S und s; die Zahl der Seiten der Grundfläche = n, so ist der Perimeter der Grundfläche = nS und ns. Nun ist nS : ns = S : s (§. 74. Arith.) = A : a und A : a = A : á und wenn man diese Proportionen mit einander multiplicirt,

so

so ist $n . S . A : n . s . a = A^2 : a^2$ (§. 87. Arith.), aber $O : o = n . S . A : n . s . a$, also $O : o = A^2 : a^2 = S^2 : s^2$.

## §. 276.

Wenn ein senkrechter Cylinder ABCD (Fig. 233.) gleiche Grundfläche und gleiche Höhe mit einem senkrechten Kegel ABE hat, so verhält sich die Oberfläche des Cylinders zur Oberfläche des Kegels, wie das Rechteck aus dem Durchmesser der Grundfläche und der Höhe des Cylinders AB . AD zum Rechteck aus dem Radius der Grundfläche und der Seite des Kegels AF . AE.

Es sey die Oberfläche des Cylinders $= O$ und des Kegels $= o$, so ist $O = \pi . AB . AD$ (§. 260.) und $o = \pi . AB . \frac{1}{2} AE$ (§. 273); $O : o = \pi . AB . AD : \pi . AB . \frac{1}{2} AE = AD : \frac{1}{2} AE$ (§. 74. Arith.) $= 2 AD : AE$ und wenn man mit AF multiplicirt, so ist $O : o = 2 AF . AD : AF . AE$ (§. 74. Arith.), aber $2 AF = AB$, also $O : o = AB . AD : AF . AE$.

# Viertes Kapitel.

## Von der Kugel und von regulären Körpern.

§. 277.

Eine Kugel ist ein geometrischer Körper, der von einer zusammenhängenden krummen Oberfläche von der Beschaffenheit eingeschlossen ist, daß sie allenthalben von einem in der Kugel befindlichen Punct, **Mittelpunct der Kugel** genannt, gleich weit abstehet. Aus dieser Erklärung folgt: 1) daß alle Halbmesser einer und derselben Kugel gleich sind; 2) daß jeder Durchmesser der Kugel aus zwey Halbmessern bestehet; 3) daß jede Chorde innerhalb der Oberfläche der Kugel liegt; 4) daß Kugeln von gleichen Halbmessern oder Durchmessern ähnlich und gleich sind.

§. 278.

**Wenn eine Kugel (Fig. 239.) durch eine Ebene geschnitten wird, so ist der Schnitt ein Kreis.**

1) Gehet der Schnitt AB durch den Mittelpunct C und man ziehet CA, CB und CD, so sind diese Linien gleich (§. 227.) und folglich der Schnitt ein Kreis (§. 14.).

2) Gehet der Schnitt nicht durch den Mittelpunct wie EF, so fälle man von C auf die Ebene EF die senkrechte Linie CG herab, ziehe die Linien GE, GK

GK und GF und überdies CE, CK und CF, so ist in den Dreyecken EGC und KGC der Winkel EGC = KGC = R (§. 216), CG = CG und EC = CK (§. 277), also KG = EG = FG und folglich EKF ein Kreis, dessen Mittelpunct G ist (§. 13).

## §. 279.

**Der Kugelschnitt AB (Fig. 239), welcher durch den Mittelpunct der Kugel C geht, ist gröſser als jeder andere Schnitt EF, dessen Fläche nicht durch den Mittelpunct der Kugel C geht.**

Man ziehe aus C eine Linie CG auf die Ebene EF senkrecht, so ist nach dem im vorigen §. gegebenen Beweise G der Mittelpunct des Kreises EF. In dem rechtwinklichten Dreyeck GCE ist EGC > ECG (§. 49), also EC > EG (§. 52), aber EC = AC (§. 14), also AC > EG und sind die Halbmesser gröſser, so sind es auch die Kreise, also Kreis AB > Kreis EF und weil derselbe Beweis für jede andere Kreisebene gilt, welche nicht durch den Mittelpunct der Kugel geht, so muſs der Kreis AB, dessen Ebene durch den Mittelpunct C gelegt ist, der gröſste aller Kreise seyn, welche man durch die Kugel legen kann.

## §. 280.

**Ein gröſster Kreis der Kugel ist ein solcher, dessen Fläche AB (Fig. 239.) durch den Mittelpunct der**

Kugel gehet. Kleinere Kreise heißen diejenigen, deren Flächen, wie EF, nicht durch den Mittelpunct der Kugel gehen. Hieraus folgt, daß alle große Kreise einer und derselben Kugel gleich groß sind, weil ihre Halbmesser unter sich und den Halbmessern der Kugel gleich sind. **Die Achse der Kugel** ist jeder Durchmesser PQ, welcher auf der Ebene eines größten Kreises AB senkrecht steht. **Pole eines größten Kreises** AB sind auf der Kugeloberfläche die beyden Endpuncte P und Q des Durchmessers PQ, welcher auf der Ebene des Kreises AB senkrecht stehet; also ist ACP = DCP = ICP = BCP = R = 90° (§. 216.) und die Pole P und Q eines größten Kreises AB stehen allenthalben 90° von jedem Puncte im Umfange des Kreises entfernt, weil AP = DP = IP = BP = 90° ist (§. 28).

## §. 281.

**Eine gerade Linie** CG (Fig. 239), **welche vom Mittelpunct der Kugel** C **zum Mittelpuncte** G **eines kleinern Kreises gezogen wird, ist senkrecht auf der Ebene des kleinern Kreises** EF.

In den Dreyecken EGC, KGC und FGC ist CG = CG, ferner EC = KC = FC (§. 277.) und EG = KG = FG, also EGC = KGC = FGC (§. 41); also CG senkrecht auf der Ebene EF (§. 224).

§. 282.

§. 282.

**Wenn zwey Kreise AB und DE (Fig. 240.) gleich weit vom Mittelpuncte C einer Kugel entfernt sind, d. h. wenn CG = CF, so sind diese Kreise gleich groß oder AB = DE und wenn die Kreise gleich groß sind, AB = DE, so ist ihre Entfernung vom Mittelpuncte gleich oder CG = CF.**

1) Man ziehe CD und CA, so ist vermöge der Voraussetzung CF = CG und CG senkrecht auf DE und CF senkrecht auf AB (§. 281); also AFC = DGC = R und CA = CD (§. 277); folglich AF = DG (§. 50. Num. 2.) und daher die Kreise gleich oder AB = DE.

2) Ist AB = DE, so ist auch AF = DG, G = F = R und CA = CD; also CF = CG (§. 58. Num. 2.).

§. 283.

**Parallelkreise auf der Kugeloberfläche** sind Kreise, deren Ebenen AB und DE (Fig. 241.) parallel sind. Geht die gerade Linie GCF durch die Mittelpuncte beyder Kreise G und F zugleich durch den Mittelpunct der Kugel C, so sind die Kreise AB und DE parallel (§. 235. 280.) und zugleich im Halbmesser, in der Peripherie und im Flächeninhalt gleich, wenn CF = CG ist (§. 282.).

§. 284.

**Wenn zwey größte Kreise AEBF (Fig. 242.) und APBQ auf der Kugeloberfläche sich schneiden, so werden sie in zwey gleiche Halbkreise getheilt.**

Es sey AEBF die Ebene eines größten Kreises, welche von der Ebene eines zweyten größten Kreises APBQ geschnitten wird, so muß bewiesen werden, daß APB = BQA = AEB = AFB = 2 R = 180° ist. Die Durchschnittslinie dieser beyden Kreisebenen ist eine gerade Linie AB (§. 221), welche durch den Mittelpunct der Kugel C gehen muß, weil jede dieser Kreisebenen durch den Mittelpunct der Kugel gehet und gleichen Mittelpunct mit der Kugel hat (§. 279); also ist AB der Durchmesser sowohl des Kreises APBQ als des Kreises AEBF (§. 13.) und der Durchmesser theilt gleich große Kreise in gleich große Halbkreise (§. 21), nämlich APB = BQA = AEB = AFB.

§. 285.

**Wenn ein größter Kreis PEQF (Fig. 242.) durch die Pole P und Q eines andern größten Kreises AEBF gehet, so stehen die Kreise auf einander senkrecht.**

Man ziehe FCE und in der Ebene PQ die Linie CP senkrecht auf FE, so muß CP durch den Pol P gehen (§. 280); in der Ebene AB ziehe man CB senkrecht auf FE, so ist der Winkel BCP der Neigungswinkel

winkel beyder Kreisflächen (§. 217. 231.); weil aber der Pol P allenthalben 90° vom Umkreise des Kreises AB abstehet (§. 280), so ist PB = PA = R, also der Neigungswinkel beyder Kreisebenen ein rechter Winkel, daher steht die Kreisebene PEQF senkrecht auf der Kreisebene AEBF (§. 216. 230.).

## §. 286.

**Die Kugel DBKL (Fig. 243.) beträgt $\frac{2}{3}$ des um dieselbe beschriebenen Cylinders CIMN, welcher gleichen Durchmesser LB und gleiche Höhe IM mit der Kugel hat.**

Man stelle sich vor, daß der vierte Theil der Kugel DGB, das Quadrat ABCD und das Dreyeck ADC sich um AD wie um eine Achse drehen, so wird DGB eine Halbkugel BDL (§. 280), ABCD einen halben Cylinder LBCI (§. 254.) und das Dreyeck ADC einen Kegel ICA (§. 264.) beschreiben. Schneidet man nun alle durch eine Ebene hH, so ist hH der Durchmesser eines Kreisschnitts oder einer Scheibe des Cylinders, gG der Kugel und Ff des Kegels. Die Summe aller dieser verschiedenen Scheiben werden zusammen den Cylinder, die Kugel und den Kegel ausmachen. Nun ist $AG^2 = AE^2 + EG^2$ (§. 93.) und weil AG = AB (§. 277.) = EH (§. 74), so ist $AG^2 = EH^2$ (§. 71), also $EH^2 = AE^2 + EG^2$. Da ferner AD : DC = AE : EF (§. 141.) und AD =

DC

DC (§. 69), so ist auch AE = EF (§. 76. Arith.) und $AE^2 = EF^2$, folglich $EH^2 = EF^2 + EG^2$ und wenn man auf beyden Seiten $EF^2$ subtrahirt, so ist $EH^2 - EF^2 = EG^2$. Weil aber Kreise sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser verhalten (§ 209), so ist Scheibe Hh — Scheibe Ff = Scheibe Gg und die Summe aller Scheiben Hh des Cylinders — Summe aller Scheiben Ff des Kegels = Summe aller Scheiben Gg der Kugel, d. h. Cylinder LBCI — Kegel ICA = Halbkugel LBD. Aber der Kegel ICA = $\frac{1}{3}$ Cylinder LBCI (§. 269); also Cylinder LBCI — $\frac{1}{3}$ LBCI = $\frac{2}{3}$ LBCI = Halbkugel LDB und, wenn man auf beyden Seiten mit 2 multiplicirt, $\frac{2}{3}$ MNCI = Kugel LDBK.

## §. 287.

**Den Inhalt einer Kugel zu berechnen, deren Durchmesser LB (Fig. 243.) gegeben ist.**

1) Aus dem gegebenen Durchmesser berechne man den Inhalt eines größten Kreises LB (§. 195.) = MN.

2) Diesen multiplicire man mit dem Durchmesser der Kugel DK, so hat man den Inhalt des um die Kugel beschriebenen Cylinders MNCI (§. 258.).

3) Hievon nehme man $\frac{2}{3}$, so hat man den Inhalt der Kugel LDBK (§. 286.).

Es

Es sey z. B. LB = 10′, so ist der Quadratinhalt des größten Kreises LB = MN = 78,54 Quadratfuß und, wenn man dies mit der Höhe DK = 10′ multiplicirt, so erhält man den Inhalt des Cylinders MNCI = 785,4 Kubicfuß, wovon $\frac{2}{3}$ = $\frac{2}{3}$ · 785,4 = 523,6 Kubicfuß der körperliche Inhalt der Kugel ist.

Anmerk. Noch kürzer kann man eine Kugel, deren Durchmesser = D ist, berechnen, wenn man den Kubus von D mit 0,5235998 ... multiplicirt; denn $\frac{2}{3}$ . 0,7853981 .... $D^2$ . D = 0,5235998 ... $D^3$ oder in kleinern Zahlen = 0,5236 . $D^3$.

## §. 288.

**Man findet den Inhalt der Kugel, wenn man die Oberfläche derselben mit $\frac{1}{6}$ des Durchmessers multiplicirt (Fig. 244).**

Man stelle sich vor, daß die ganze Oberfläche der Kugel in unendlich kleine Figuren getheilt sey, welche alle gleich groß sind. Diese Figuren nenne man A, B, D, E u. s. w. und stelle sich ferner vor, daß auf diesen Figuren als Grundflächen Pyramiden stehen, welche mit ihren Spitzen in den Mittelpunct der Kugel zusammenstoßen, so ist kein merklicher Unterschied zwischen den Höhen dieser Pyramiden und dem Radius der Kugel = R und der Inhalt der Kugel wird der

Summe

Summe aller dieser Pyramiden gleich seyn oder Kuge $= \frac{1}{3} R . A + \frac{1}{3} R . B + \frac{1}{3} R D + \frac{1}{3} R . E$ u. s. w. $= \frac{1}{3} R . (A + B + D + E \ldots)$. Ist der Durchmesser der Kugel $= D$, so ist $\frac{1}{3} R = \frac{1}{6} D$ und die Kugel $= \frac{1}{6} D . (A + B + D + E \ldots)$ oder dem sechsten Theil des Products aus dem Durchmesser in die Oberfläche der Kugel.

§. 289.

**Man findet die Oberfläche der Kugel, wenn man den Inhalt des größten Kreises derselben mit 4 multiplicirt.** (Fig. 243.)

Man stelle sich um die Kugel einen Cylinder MNCI beschrieben vor, dessen kubischer Inhalt $= C$, Grundfläche $MN = LB =$ dem größten Kreise der Kugel $LB = M$ (§. 280) und Höhe $IM =$ dem Durchmesser der Kugel $= D$ ist. Es sey die Oberfläche der Kugel $= O$ und deren kubischer Inhalt $= K$, so ist $D M = C$ (§. 258) und $\frac{2}{3} D . M = \frac{2}{3} C = K$ (§. 286), aber $\frac{1}{6} D O = K$ (§. 288.), also $\frac{2}{3} D . M = \frac{1}{6} D . O$ und wenn man durch D dividirt, so ist $\frac{2}{3} M = \frac{1}{6} O$ und durch die Multiplication mit 6 ist $\frac{12}{3} M = 4 M = O$, oder die Oberfläche der Kugel ist so groß als die Fläche des größten Kreises 4 mal genommen.

Es sey z. B. der Durchmesser der Kugel $= 6'$, so ist die Fläche des größten Kreises $= 9,7854 . 36$

$=$

= 28,2744 Quadratfuß und die Oberfläche der Kugel = 4 . 28,2744 = 113,097 Quadratfuß.

§. 290.

**Die Oberfläche der Kugel ist so groß, als die krumme oder concave Oberfläche des um dieselbe beschriebenen Cylinders.** (Fig. 245).

Man stelle sich vor, daß um den Kreis ein Polygon von unendlich vielen kleinen Seiten FS, SG, GK, KI u. s. w. beschrieben sey. Das Rechteck NMHP wird bey der Umdrehung um NP ein Element MH hm des Cylinders ABDE und das Trapezium NG KP einen abgekürzten Kegel GK g k beschreiben, welchen man als ein Element der Kugel ansehen kann. Man halbire GK in O und ziehe OQ senkrecht auf den Durchmesser der Kugel FL und GR auf PH und endlich den Radius CO. Weil nun der Winkel GKR gemeinschaftlich und R = O ist, so ist △ GKR ∽ △ TKO (§. 149) ∽ △ TCP ∽ △ COQ (§. 141); also GK : GR = CO : OQ (§. 142), aber GR = MH und CO = PH, also GK : MH = PH : OQ, aber die Peripherien der Kreise verhalten sich wie ihre Radien (§. 181), folglich GK : MH = Periph. PH : Periph. OQ und GK. Periph. OQ = MH. Periph. PH (§. 78. Arith.). Nun ist GK . Periph. OQ = Oberfläche des abgekürzten Kegels GK g k (§ 274) oder des Elements der Kugel und HM. Periph. ist die runde Oberfläche des cylindrischen Elements MH hm (§ 266),

woraus folgt, daß die Oberfläche jedes Elements der Kugel gleich der Oberfläche jedes Elements des Cylinders ist und addirt man alle diese gleich großen Oberflächen, so ist die ganze Oberfläche der Kugel so groß als die ganze runde Oberfläche des Cylinders.

§. 291.

Aus diesem Lehrsatze folgt:

1) daß man die Oberfläche einer Kugel = O finden könne, wenn man die Peripherie des größten Kreises derselben = P mit dem Durchmesser = D multiplicirt, so daß PD = O ist; denn die runde Oberfläche des um die Kugel beschriebenen Cylinders ist = P . D (§. 260), also auch O = PD (§. 290) Es sey z. B. der Durchmesser der Kugel = 6', so ist die Peripherie = 3,14159 . 6 = 18,8495 und die Oberfläche der Kugel = 18,8495 . 6 = 113,097 Quadratfuß.

2) Man stelle sich vor, daß die Kugel und der um dieselbe beschriebene Cylinder (Fig. 245) durch parallele Ebenen Mm, Hh, Ii, geschnitten werden, so ist Oberfläche des Gürtels oder der Zone GK kg der Kugel so groß als die runde Oberfläche des Cylinders MH hm, dessen Grundfläche ein größter Kreis und dessen Höhe die Höhe der Zone NP = MH; eben so KI ik = HI ih.

3)

3) Hieraus folgt wieder, daß die Oberfläche eines Kugelabschnitts GgF oder die krumme Oberfläche eines kleinern Kreises, dessen Durchmesser = Gg, so groß ist als die krumme Oberfläche eines Cylinders DMmE, welcher zur Grundfläche einen größten Kreis der Kugel und gleiche Höhe mit dem Kugelabschnitt hat, DM = NF. Eben so ist die Oberfläche von KkF = krumme Oberfläche von DHhE.

§. 292.

Ein Sector oder Ausschnitt einer Kugel entsteht, wenn ein Kreisausschnitt ADC (Fig. 246.) sich um DC drehet. Die Grundfläche des Kugelausschnitts ist die krumme Oberfläche eines kleinern Kreises ALB oder des Abschnitts und übrigens geht er wie eine Kegelspitze zum Mittelpunct C.

§. 293.

Der kubische Inhalt eines Sectors der Kugel ADBC (Fig. 246) ist $\frac{2}{3}$ eines Cylinders EFGH, welcher einen größten Kreis EF zur Grundfläche und die Höhe DK des Kugelabschnitts ALBD hat.

So wie man sich vorstellen kann, daß die ganze Kugel aus unendlich vielen Pyramiden besteht, deren

Grundflächen die ganze Oberfläche der Kugel ausmachen und deren gemeinschaftliche Höhe der Halbmesser der Kugel ist (§. 288) und der Inhalt der Kugel durch die Multiplication ihrer Oberfläche mit $\frac{1}{6}$ ihres Durchmessers oder $\frac{1}{3}$ des Radius gefunden wird: so ist auch der Kugelsector ABCD (Fig. 246) gleich der Oberfläche des Abschnitts oder Segments, dessen Durchmesser AB ist, mit $\frac{1}{3}$ des Radius der Kugel multiplicirt $= \frac{1}{3}$ AC. Man nenne nun die krumme Oberfläche des Segments $=$ B, den Halbmesser der Kugel AC $=$ R und den körperlichen Inhalt des Sectors $=$ S, so ist $S = \frac{1}{3} R . B$; man nenne ferner die Peripherie des größten Kreises der Kugel, $=$ P, die Höhe des Segments DK $=$ H, so ist die Oberfläche des Segments oder die Oberfläche des Cylinders EFGH (§. 290) $=$ P . H (§. 260) $=$ B und wenn man diesen Werth in $S = \frac{1}{3} R . B$ setzt, so hat man $S = \frac{1}{3} R . P . H$.

Ferner ist im Cylinder EFGH die Grundfläche $EF = \frac{1}{4} D . P$ (§. 195) und wenn man dies mit der Höhe GF $=$ DK $=$ H multiplicirt, so hat man den Inhalt des Cylinders EFGH $=$ C, also $C = \frac{1}{4} D . P . H$ (§. 258) und weil $\frac{1}{4} D = \frac{1}{2} R$, so ist $C = \frac{1}{2} R . P . H$. Multiplicirt man nun auf beyden Seiten mit $\frac{2}{3}$, so ist $\frac{2}{3} C = \frac{2}{3} . \frac{1}{2} R . P . H = \frac{1}{3} R . P . H$; aber $\frac{1}{3} R . P . H = S$ wie vorhin erwiesen ist; also

also $\frac{2}{3}$ C = S oder der Sector der Kugel ADBC beträgt $\frac{2}{3}$ des Cylinders EFGH.

§. 294.

Bewegt sich der andere Sector CANM (Fig. 246), welcher den erstern zum Halbkreis DNM ergänzt, um CM, so entsteht ein Körper CANMPBC, dessen Inhalt $\frac{2}{3}$ des Cylinders QRFE beträgt; denn die Ku. DNMP ist = $\frac{2}{3}$ QRGH (§. 286); Kugelsector ADBC = $\frac{2}{3}$ EFGH (§. 292), also Kugel DMNP — Sector ADBC = $\frac{2}{3}$ QRGH — $\frac{2}{3}$ EFGH, oder CANMPBC = $\frac{2}{3}$ QRFE.

§. 295.

**Die Oberfläche eines Segments der Kugel (Fig. 246), welche entsteht, wenn sich der Bogen AD um DK herum dreht, ist der Fläche eines Kreises gleich, dessen Radius die Chorde AD des gedachten Bogens ist.**

DK : AD = AD : DM (§. 158, Num. 4.) und DK : $\frac{1}{2}$ AD = AD : $\frac{1}{2}$ DM; $\frac{1}{2}$ DM = AC = DC = KF, also DK : $\frac{1}{2}$ AD = AD : KF. Nun verhalten sich die Peripherien der Kreise wie ihre Radien (§. 181. Num. 2.) oder AD : KF = Periph. AD : Periph. KF; folglich DK : $\frac{1}{2}$ AD = Periph. AD : Periph. KF und DK . Periph. KF = $\frac{1}{2}$ AD, Periph. AD, aber DK . Periph. KF = Oberfläche des Segments (§. 291. Num. 3) und $\frac{1}{2}$ AD . Periph. AD =

Fläche eines Kreises, dessen Radius die Chorde AD ist (§. 196).

§. 296.

Hieraus folgt (Fig. 246):

1) **Die Oberfläche der ganzen Kugel ist der Summe der beyden Kreisflächen gleich, deren Radien die Chorden AD und AM sind, welche man von jedem Puncte in der Oberfläche der Kugel A zu den äußersten Puncten des Durchmessers M und D ziehen kann.** Wir wollen die Fläche eines Kreises, dessen Radius AD ist, = OAD und die Fläche eines Kreises, dessen Radius AM ist = OAM nennen, so ist die Oberfläche des Segments ADB = OAD (§. 295) und aus gleicher Ursache die Oberfläche des Abschnitts AMB = OAM; folglich OAD + OAM = ADB + AMB = Oberfläche der ganzen Kugel ADBMA.

2) Weil der Winkel im Halbkreise DAM ein rechter Winkel ist, so ist die Summe der an beyden Katheten AD und AM beschriebenen ähnlichen Figuren so groß als die ähnliche Figur an der Hypotenuse DM (§. 211. 212.), also OAD + OAM = ODM oder **die Oberfläche der Kugel ist der Fläche eines Kreises gleich, dessen Radius der Durchmesser der Kugel DM ist;** aber QDC : ODM = $1^2 : 2^2 = 1 : 4$ (§. 209.

209. Num. 4), also $4ODC = ODM =$ Oberfläche der Kugel; aber vier Kreise, deren Halbmesser der Halbmesser der Kugel ist, sind größte Kreise (§. 280). **Die Oberfläche der Kugel ist also der Oberfläche eines größten Kreises viermal genommen gleich,** welches bereits oben (§. 289) auf eine andere Weise erwiesen worden ist.

§. 297.

**Der Inhalt eines Segments der Kugel ADB** (Fig. 246.) **ist dem Inhalt eines Cylinders gleich, dessen Grundfläche ein Kreis ist, der mit einem Radius, der Höhe des Segments DK gleich, beschrieben und dessen Höhe so groß ist als der Radius der Kugel CD weniger $\frac{1}{3}$ von DK.**

Kugelabschnitt $ADB =$ Sector $ADBC -$ Kegel ABC; aber Sector $ADBC = OAD . \frac{1}{3} CD$ (§. 293. 295.) $= (OAK + ODK) . \frac{1}{3} CD$ (§. 211. 212.) $= OAK . \frac{1}{3} CD + ODK . \frac{1}{3} CD$ und Kegel $ABC = OAK . \frac{1}{3} CK$ (§. 269. 270.); also Segment $ADB = OAK . \frac{1}{3} CD + ODK . \frac{1}{3} CD - OAK . \frac{1}{3} CK = OAK . (\frac{1}{3} CD - \frac{1}{3} CK) + ODK . \frac{1}{3} CD$. Nun ist, wie aus der Figur erhellet, $\frac{1}{3} CD - \frac{1}{3} CK = \frac{1}{3} DK$; also Segment $ADB = OAK . \frac{1}{3} DK + ODK . \frac{1}{3} CD$. Ferner $OAK : ODK = AK^2 : DK^2$ (§. 209. Num. 4.) und $AK^2 = DK . KM$ (§. 158. Num. 3.); also $OAK : ODK = DK . KM : DK^2$

$= KM : DK$ und wenn man die äußern und mittlern Glieder multiplicirt, $OAK . DK = ODK . KM$ und $OAK . \frac{1}{3} DK = ODK . \frac{1}{3} KM$. Diesen Werth setze man in die vorhin erhaltene Formel: Segment $ADB = OAK . \frac{1}{3} DK + ODK . \frac{1}{3} CD$, so folgt, daß Segment $ADB = ODK . \frac{1}{3} KM + ODK . \frac{1}{3} CD = ODK . \left(\frac{KM + CD}{3}\right)$; aber $KM = DM - DK = 2\,CD - DK$, also Segment $ADB = ODK . \left(\frac{2\,CD - DK + CD}{3}\right) = ODK . \left(\frac{3\,CD - DK}{3}\right) = ODK . \left(CD - \frac{DK}{3}\right)$.

§. 298.

**Die Oberfläche der Kugel verhält sich zur ganzen Oberfläche des um sie beschriebenen Cylinders, wie 2 : 3.**

Oberfläche der Kugel $= PD$ (§. 291. Num. 1.), beyde Grundflächen des Cylinders $= \frac{1}{4} PD + \frac{1}{4} PD = \frac{1}{2} PD$ (§. 195.) und die krumme oder cylindrische Oberfläche desselben $= PD$ (§. 265); also die ganze Oberfläche des Cylinders $= \frac{1}{2} PD + PD = \frac{3}{2} PD$ und Oberfläche der Kugel : ganze Oberfläche des Cylinders $= PD : \frac{3}{2} PD = 2\,PD : 3\,PD = 2 : 3$.

§. 299.

**Die Oberflächen zweyer Kugeln verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser und ihr Kubicinhalt wie die Kubi ihrer Durchmesser.**

1)

1) Man denke sich zwey Kugeln K und k, deren Durchmesser D und d, die Peripherien ihrer größten Kreise P und p und die Oberflächen der Kugeln O und o, so ist $O = PD$ (§. 291. Num. 1.), aber $P = \pi \cdot D$ (§. 191), also $O = \pi \cdot D^2$ und eben so $o = \pi \cdot d^2$, also $O : o = \pi \cdot D^2 : \pi d^2 = D^2 : d^2$.

2) Inhalt der Kugel $K = 0{,}5236 \cdot D^3$ (§. 287. Anmerk.) und $k = 0{,}5236 \cdot d^3$, also $K : k = 0{,}5236 \cdot D^3 : 0{,}5236 \cdot d^3 = D^3 : d^3$.

## §. 300.

**Es kann nur fünf reguläre geometrische Körper geben, nämlich: 1) den Kubus; 2) das Tetraëder; 3) das Octaëder; 4) das Dodecaëder; 5) das Icosaëder (§. 239.).**

Ein körperlicher Winkel besteht aus mehr als zwey ebenen Winkeln, welche in eine Spitze zusammenstoßen und deren Schenkel neben einander liegen (§. 218.). Die ebenen Winkel, welche einen körperlichen Winkel bilden, müssen zusammen kleiner als 4 R oder 360° seyn, weil sie sonst keinen körperlichen Winkel oder hervorstehende Spitze bilden könnten, sondern in einer Ebene liegen würden (§. 224.). Die gleichen Ebenen, von welchen ein regulärer Körper eingeschlossen ist, und welche die gleich großen körperlichen Winkel desselben bilden, können zuerst gleichseitige Dreyecke seyn, so daß

drey gleich große gleichseitige Dreyecke einen körperlichen Winkel = 60° . 3 = 180° = 2 R bilden, woraus ein **Tetraëder** entsteht, dessen körperliche Winkel = 180° = 2 R sind und der von vier gleichen gleichseitigen Dreyecken begrenzt ist. Ein körperlicher Winkel kann ferner von vier gleich großen gleichseitigen Dreyecken gebildet werden und ist = 60° . 4 = 240° = $2\frac{2}{3}$ R, woraus das **Oktaëder** entstehet, in welchem jeder körperliche Winkel = 240° = $\frac{8}{3}$ R ist. Dieser Körper ist von acht gleich großen gleichseitigen Dreyecken eingeschlossen. Endlich denke man sich einen körperlichen Winkel, der von fünf gleich großen gleichseitigen Dreyecken eingeschlossen ist, so ist derselbe = 60° . 5 = 300° = $3\frac{1}{3}$ R, woraus das **Ikosaëder** entsteht, dessen körperliche Winkel = 60° . 5 = $\frac{10}{3}$ R und der von zwanzig gleich großen gleichseitigen Dreyecken eingeschlossen ist. Mehr reguläre geometrische Körper können von gleichseitigen Dreyecken nicht gebildet werden; denn sechs gleichseitige Dreyecke bilden keinen körperlichen Winkel, weil 60° . 6 = 360° = 4 R ist. Will man nun einen körperlichen Winkel aus Quadraten zusammensetzen, so muß man dazu wenigstens drey nehmen und der körperliche Winkel ist = 90° . 3 = 270° = 3 R und daraus entsteht das **Hexaëder** oder der Kubus, dessen körperlicher Winkel = 270° = 3 R ist und welcher von sechs gleich großen Quadraten begrenzt wird. Aus Quadraten läßt sich kein regulärer

Kör-

Körper mehr zusammensetzen; denn wollte man vier Quadrate zu einem körperlichen Winkel nehmen, so würde derselbe $= 90° . 4 = 360°$ seyn, welches eine Ebene gibt. Will man einen körperlichen Winkel aus drey Fünfecken, deren Polygonwinkel $= 108°$ ist (§. 166), zusammensetzen, so ist derselbe $= 108° . 3 = 324° = 3\frac{3}{7}$ R, woraus das **Dodecaëder** entsteht, dessen körperlicher Winkel $= 324°$ ist. Dieser Körper hat zwölf gleich große Zwölfecke zu Grenzen. Aus vier Fünfecken läßt sich kein körperlicher Winkel zusammensetzen, weil $108° . 4 = 432° > 360°$ ist. Aus drey Sechsecken kann kein körperlicher Winkel zusammengesetzt werden, weil der Polygonwinkel des Sechsecks $= 120°$ (§. 166.) ist und $120° . 3 = 360°$ beträgt; eben so wenig aus drey Siebenecken, Achtecken u. s. w., weil drey dieser Polygonwinkel größer als 4 R sind (§. 166.). Es sind also keine reguläre Körper mehr möglich, als die eben genannten fünf.

## §. 301.

Hieraus lassen sich folgende Schlüsse herleiten:

1) Will man die Anzahl der Winkel eines regulären Körpers oder Polyëders wissen, so multiplicirt man die Anzahl der Seiten jeder Seitenfläche mit der Zahl der Seitenflächen; so ist die Anzahl der Winkel des **Tetraëders** $= 3 . 4 = 12$ und alle betragen $12 . 60° = 720°$; im **Hexaëder**

=

$= 4 . 6 = 24$ und diese betragen $24 . 90° =$ $2160°$; im Octaëder $= 3 . 8 = 24$ und diese betragen $24 . 60° = 1640°$; im Dodecaëder $= 5 . 12 = 60$ und diese betragen $60 . 108 = 6480°$; im Icosaëder $=$ $= 3 . 20 = 60$ und diese betragen $60 . 60° =$ $3600°$.

2) Weiß man die Anzahl aller Winkel eines Polyëders, so kann man die Anzahl der körperlichen Winkel oder Ecken finden, wenn man durch die Menge der Winkel dividirt, welche eine Ecke ausmachen; so ist im Tetraëder die Anzahl der körperlichen Winkel $= \frac{3 . 4}{3} = \frac{12}{3} = 4$; im Hexaëder $= \frac{4 . 6}{3} = \frac{24}{3} = 8$; im Octaëder $\frac{3 . 8}{4} = \frac{24}{4} = 6$; im Dodecaëder $= \frac{5 . 12}{3} = \frac{60}{3} = 20$; im Icosaëder $= \frac{3 . 20}{5} = \frac{60}{5} = 12$.

## §. 302.

**Man soll die Oberfläche und den körperlichen Inhalt der fünf regulären geometrischen Körper oder Polyëder finden.**

1) Weil die Seitenflächen jedes regulären Polyëders gleich groß sind (§. 239), so hat man nur nöthig eine

eine derselben zu berechnen und den Inhalt derselben mit der Anzahl der Seiten zu multipliciren. Dieses Product gibt die Oberfläche des Polyëders. Z. B. in einem Icosaëder sey die Grundlinie eines der zwanzig gleichen Dreyecke = 52′ und die Höhe = 46′, so ist eines der Dreyecke = 52. 23 = 1196 Quadratfuß, welches 20 mal genommen die Oberfläche des Icosaëders = 23920 Quadratfuß gibt.

2) Diese gefundene Oberfläche multiplicire man mit $\frac{1}{6}$ der Höhe des Polyëders, welche der Radius der Kugel ist, in welche das Polyëder beschrieben werden kann. Das Product gibt den kubischen Inhalt des Polyëders. Z. B. im angeführten Icosaëder, dessen Oberfläche = 23920 Quadratfuß, ist die Höhe = 84′; also der körperliche Inhalt = $23920 . \frac{84}{6} = 23920 . 14 =$ 334880 Kubicfuß.

**Beweis.** Ein regulärer Körper kann angesehen werden, als bestünde er aus so vielen gleich großen Pyramiden, als er Seitenflächen hat. Die Spitzen dieser Pyramiden stoßen in einen Punct zusammen, welcher von jeder Ecke des Polyëders gleich weit entfernt liegt und der Mittelpunct der um und in den Körper beschriebenen Kugel ist. Die Grundflächen und Seitenlinien dieser Pyramiden sind also gleich groß und folglich auch die Pyramiden selbst und die Höhe

jeder

jeder derselben ist die halbe Höhe des Polyëders. Den kubischen Inhalt jeder dieser Pyramiden findet man aber, wenn man den Inhalt der Grundfläche mit $\frac{1}{3}$ der Höhe der Pyramide, d. h. $\frac{1}{6}$ der Höhe des Polyëders multiplicirt und den Inhalt aller dieser Pyramiden, d. h. den Inhalt des Polyëders, wenn man die Summe aller Grundflächen der Pyramiden, d. h. die Oberfläche des Polyëders mit $\frac{1}{6}$ der Höhe desselben multiplicirt.

**Anmerk.** 1. Da die Theorie der Polyëder eben keinen weitern Einfluß oder erhebliche Anwendung in der Geometrie oder in andern Theilen der Mathematik hat, so habe ich sie nur kurz berührt und nicht mit strenger geometrischer Genauigkeit bewiesen. Die ältern Geometer haben diesen Theil der Stereometrie umständlich und weitläuftig abgehandelt, z. B. **Euklides** in seinen Elementen der Geometrie, Buch 13, 14, 15. Unter den neuern hat **Bertrand** diese Materie vortreflich entwickelt (Developpement nouveau de la partie elementaire des Mathematiques, Tom. 2. Geneve 1778. p. 271-302.). Vorhin ist zwar bewiesen, daß es nur fünf reguläre geometrische Körper geben kann (§. 300); inzwischen kann man noch mehrere Polyëder zusammensetzen, welche zwar nicht vollkommen regulär sind, aber doch eine gewisse Art von Ord-

Ordnung und Regularität haben. So gibt es einen von zwölf Rauten, einen andern von dreyßig Rauten, einen von vier und zwanzig gleichschenklichten Dreyecken, einen von sechszig gleichschenklichten Dreyecken u. s. w. eingeschlossenen Körper. Außer den beyden erst genannten von Rauten eingeschlossenen Körpern hat zuerst **A. Sharp**, wie es scheint, zwölf solche Polyëder erfunden, beschrieben und deren Berechnung gelehrt (A. Sharp Geometry improved, London 1717. in 4. p. 73-96.).

**Anmerk.** 2. In der Baukunst und Fortification kann es oft vorkommen, daß man den kubischen Inhalt einer Mauer, eines Gewölbes von verschiedener Gestalt, eines Walles und dessen Bekleidung u. s. w. berechnen soll. Obgleich nun diese eigentlich keine geometrische Körper sind, so lassen sie sich doch in Prismen, Pyramiden, Kegel, Stücke einer Kugel und andere Körper, welche entweder in die elementarische oder höhere Geometrie gehören, zerlegen. Ueber die Berechnung solcher Körper kann man Deidier la science des Géometres, Paris 1739. in 4. Part. 4. Belidor Cours de Mathematique, Paris 1725. in 4. Part. 4 & 5. und Manduit Leçons de Géometrie à l'usage des Architectes, Paris 1773. in 8. nachsehen. Ist die Gestalt der Körper

so

so irregulär, daß sie sich auf keine Weise auf einen geometrischen Körper reduciren lassen, z. B. eine Statue, ein Klumpen Metall, so lassen sie sich auch keinesweges geometrisch berechnen. In solchen Fällen nimmt man seine Zuflucht zu mechanischen Hülfsmitteln. Man läßt sich ein rechtwinklichtes Parallelepipedum verfertigen, legt in dasselbe den Körper und füllt es mit Wasser an, daß der Körper völlig bedeckt wird. Man mißt nun die Höhe des Wassers und berechnet die Menge desselben. Darauf nimmt man den Körper heraus, wodurch das Wasser herabsinkt, mißt aufs neue die Höhe des Wassers und berechnet den kubischen Inhalt desselben, so gibt der Unterschied zwischen dem ersten und letzten Inhalt die Größe des irregulären Körpers.

**Anmerk. 3.** Eine für das bürgerliche Leben wichtige Anwendung der Stereometrie ist die **Visirkunst**, welche finden lehrt, wie große Anzahl von Kannen ein Faß enthält, welches entweder ganz oder nur zum Theil mit Wein, Brantewein u. s. w. angefüllt ist. Dies geschieht durch Hülfe der **Visirstäbe**. Der **kubische Visirstab** ist so eingerichtet, daß er durch seine Eintheilungen geradezu den Inhalt des Fasses in Kannen angibt, wenn man ihn durch das Spundloch bis in die untere

Ecke

Ecke des Bodens steckt. Der **cylindrische Visirstab** hat eine solche Eintheilung, daß er, wenn man den Durchmesser des Bodens und den Durchmesser des Fasses beym Spundloche mißt und die mittlere arithmetische Proportionalzahl aus beyden mit der Länge des Fasses multiplicirt, die Größe desselben in Kannen, Vierteln, Stübchen, Quartieren angibt. Obgleich der kubische Visirstab im Gebrauch der bequemste ist, so fehlt er doch am meisten, weil bey demselben vorausgesetzt wird, daß die Länge des Fasses doppelt so groß als der mittlere Durchmesser sey, welches doch nur selten und bey wenigen Fäßern zutrifft. Der cylindrische Visirstab ist zwar genauer, hat aber auch seine Schwierigkeiten, welche in der Biegung und Krümmung des Faßholzes ihren Grund haben. Einige halten dafür, daß die Faßstäbe nach dem Kreise, Andere nach der Ellipse oder Parabel und noch Andere nach der Conchoide gebogen sind. Hier hat man aber keine geometrische Gewißheit, sondern in den meisten Fällen nur eine nahe oder wahrscheinliche Figur, woraus folgt, daß zwischen dem durch Hülfe des Visirstabes berechneten Inhalt eines Fasses und dem durch wirkliche Ausmessung in Stübchen oder Quartieren immer einiger Unterschied Statt finden wird. Die Theorie ist die richtigste, die am wenigsten

von der Erfahrung abweicht. Die erſten Gründe der Theorie vom Viſirſtabe findet man in J. F. Weidleri inſtitutiones Matheſeos cura J. Eberti. Lipſiæ 1784. p. p. 176—180. The general Gauger by John Dougharby. London, 1707, 8. Traité du jaugeage. Paris, 1728, 8. A plain and eaſy introduction to the Mathematiks with an appendix of practical Gauging by John Ward. London 1740, p. 433-456. F. G. Buſſe Kenntniſſe zur Körpermeſſung nebſt Viſirkunſt. Leipzig 1790. Lambert hat viel in dieſer Materie gearbeitet und wirklich die Viſirkunſt verbeſſert. Lamberts Beyträge zum Gebrauch der Mathematik 1. Theil, p. 344 — 369. Die neueſten Unterſuchungen, Verſuche und Verbeſſerungen ſind von Hindenburg, Käſtner und Oberreit und dieſe findet man im Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik, Leipzig 1786 und 1787. p. 1—54 und p. 81—97. Neulich hat noch J. Späth Prof. in Altdorf zwey vortrefliche Abhandlungen über die Viſirkunſt geſchrieben. Die eine heißt: Abhandlung von runden, ovalen, Ey- und Polygonal-Fäßern, Nürnberg 1794 8. und enthält den theoretiſchen Theil. In dieſer Abhandlung findet man bis jetzt noch unbekannte Regeln über die Krümmung der

Faß-

Faßhölzer, welche aus der Art hergeleitet sind, wie die Faßbinder die Fäßer verfertigen und worauf sich die Formeln für die Krümmung der Faßhölzer und die Berechnung des Fasses gründen. Die andere Abhandlung ist practisch: Practische Anweisung allerley Arten von Brau-Brenn- und Farbe-Gefäßen, so wie runde, ovale, Ey- und Polygonal-Fäßer zu visieren. Nürnberg 1794, 8. und enthält practische Regeln und Tabellen zur Berechnung der Fäßer nach den Sätzen, die im obigen theoretischen Theil bewiesen worden sind.

Anmerk. 2. Die Schiffsmessung oder die Bestimmung der Größe eines Schiffes entweder in Kubicfußen oder Tonnen oder Lasten, welche zu einem bestimmten Gewicht angenommen werden, ist noch eine Anwendung der Stereometrie. Die neuesten und besten Nachrichten davon findet man in Dictionaire encyclopedique de Marine p. M. Vial du Clairbois Tom 2. Paris 1793. p. 550—554. In Abrégé de navigation historique, theorique et practique par Jerome la Lande Paris 1793 findet man sehr bequeme Tabellen zur Schiffsmessung.

# Ebene Trigonometrie.

## Erstes Kapitel.

### Trigonometrische Linien.

§. 1.

Die ebene Trigonometrie ist die Wissenschaft, welche aus drey gegebenen Stücken eines ebenen geradlinichten Dreyecks, unter welchen wenigstens Eine Seite seyn muß, die übrigen drey Stücke zu berechnen lehrt.

**Anmerk.** Ein Dreyeck kann erst dann bestimmt berechnet werden, wenn die drey gegebenen Stücke ein Dreyeck vollkommen bestimmen, d. h. wenn man diese gegebenen Stücke in zwey Dreyecken sich denkt, diese in Rücksicht des Flächeninhalts, und der übrigen Seiten und Winkel gleich groß sind, oder wenn sich aus den gegebenen Stücken nur ein einziges Dreyeck construiren und zeichnen läßt. Die Geometrie lehrt die Fälle, in welchen dieses Statt findet. So wird ein Dreyeck durch zwey Seiten und den eingeschlossenen Winkel (§. 37. Geom.); durch drey Seiten (§. 41. Geom.); durch eine Seite und die an derselben liegenden Winkel (§. 46. Geom.); durch zwey

Winkel

Winkel und eine gegenüberliegende Seite (§. 68. Geom.) bestimmt. Hingegen bestimmt eine Seite, ein Winkel an dieser Seite und eine diesem Winkel gegenüberliegende Seite nicht genau ein Dreyeck (§. 68. Geom.). Es können aus diesen gegebenen Stücken zwey Dreyecke, eins mit einem spitzen und eins mit einem stumpfen Winkel entstehen, welches man eine **trigonometrische Zweydeutigkeit** nennt, und wovon man sowohl in der ebenen als sphärischen Trigonometrie mehrere Beyspiele hat. Aus dem Flächeninhalt eines Dreyecks läßt sich keine seiner Seiten oder oder Winkel berechnen, weil man sich unzählig viele Dreyecke denken kann, welche auf gleicher Grundlinie und zwischen Parallellinien stehen, daher alle von gleichem Flächeninhalte sind (§. 89. Geom.), aber ungleiche Seiten und Winkel haben. Eben so wenig kann man eine der Seiten eines Dreyecks berechnen, wenn bloß die Winkel gegeben sind, indem dadurch nur ähnliche Dreyecke entstehen. Diese drey zuletzt genannten Fälle gehören also nicht in die Plan-Trigonometrie. In der ebenen Geometrie construirt und zeichnet man aus den gegebenen ein Dreyeck bestimmenden Stücken dieses Dreyeck (§. 38. 47. 54. Geom.), und bestimmt durch den Transpor-

teur und Maaßstab die Größe der unbekannten Winkel und Seiten; doch kann das nur mit dem Grad von Genauigkeit und Gewißheit geschehen, welche die Größe des Transporteurs und Maaßstabes erlaubt. Dieß ist aber bey großen Dreyecken, so wie sie in der geographischen Landmessung, in der Navigation, Astronomie und Geographie vorkommen, bey weiten nicht hinlänglich, wo vielmehr die Trigonometrie, welche nicht durch Construction, sondern durch Berechnung die gesuchten Winkel und Seiten bestimmt, ganz unentbehrlich ist.

## §. 2.

Der Sinus eines Bogens AB (Fig. 247.) oder eines Winkels X ist eine senkrechte Linie BD, welche von dem einen Ende des Bogens B auf den durch das andere Ende desselben A gezogenen Radius gefällt wird. Hieraus folgt: 1) daß wenn der Bogen $= 0$ ist, oder B mit A zusammen fällt, auch keine senkrechte Linie Statt finden kann, oder daß dann auch der Sinus $= 0$ ist. 2) Der Sinus wächset von $0°$ bis $90°$, weil BD immer größer wird. 3) Wenn der Bogen AB $= 90°$ ist, oder B in G fällt, so fällt die Perpendicularе CG in den Mittelpunct C. Auf der andern Seite desselben, z. B. in M oder N wird der Sinus wieder kleiner, bis er in K oder $180°$ wieder $= 0$ wird, woraus

aus erhellet, daß der Sinus eines Bogens von 90° oder eines rechten Winkels gleich dem Radius und der größte aller Sinus ist, weswegen er Sinus totus heißt, und in der Folge mit R oder Sin. tot. bezeichnet werden wird. 4) Der Sinus BD eines gegebenen Bogens ist gleich der halben Chorde $= \frac{1}{2}$ PB des doppelt so großen Bogens BAP. Man nehme einen Bogen AP = AB; ziehe die Chorde BP, und ziehe vom Mittelpuncte C die senkrechte Linie CD auf die Chorde, so theilt diese Linie sowohl die Chorde BP als auch den Bogen BAP in zwey gleiche Theile, oder BD $= \frac{1}{2}$ PB und x = AB $= \frac{1}{2}$ BAP (§. 108. Geom.); aber BD ist der Sinus von AB; also ist der Sinus von AB $= \frac{1}{2}$ BAP oder so groß als die halbe Chorde = BD $= \frac{1}{2}$ BP eines doppelt so großen Bogens. 5) Der Sinus BD eines Bogens AB oder eines Winkels x von 30° ist dem halben Radius gleich, oder $= \frac{1}{2}$ AC. Denn der Sinus von 30° ist der halben Sehne eines Bogens von 60° gleich; die Chorde von 60° ist aber so groß als der Radius (§. 170. Geom.) und daher der Sinus von 30° $= \frac{1}{2}$ Radius $= \frac{1}{2}$ AC.

## §. 3.

Der Cosinus eines Bogens AB oder eines Winkels x ist das zwischen dem Sinus und dem Mittelpuncte liegende Stück des Radius. Hieraus folgt: 1)

ist der Bogen = 0, oder fällt B mit A zusammen, so fällt D mit A zusammen, oder ist der Bogen = 0, so ist der Cosinus so groß als der Radius. 2) So wie der Bogen wächset, wird der Cosinus kleiner und kleiner, und wenn der Bogen endlich 90° wird, dessen Sinus = GC (§. 2.), so ist der Cosinus = 0. 3) Von zwey Bogen AB und BG, oder von zwey Winkeln x und y, welche zusammen 90° ausmachen, sagt man, daß der eine das Complement des andern sey; so ist y das Complement von x. Zieht man von B eine Linie BF senkrecht auf den Radius CG, so ist FD ein Parallelogramm, wo CD = FB und BD = CF (§. 74. Geom.). Aber FB ist der Sinus und FC der Cosinus des Bogens GB oder des Winkels y (§. 2.); also ist die Linie CD, welche Cosinus eines gegebenen Bogens AB ist, zugleich Sinus des Bogens GB, welcher das Complement des Bogens AB ist, oder **Cosinus und Sinus des Complements ist einerley.**

## §. 4.

Die Tangente eines Bogens AB oder eines Winkels x ist das Stück eines Perpendikels auf AC, welches von dem andern verlängerten Radius CB in E abgeschnitten wird. Hieraus folgt: 1) daß wenn der Bogen = 0 ist, die Tangente desselben auch = 0 ist. 2) Von 0° bis 90° wird die Tangente immer größer; **aber die Tangente von 90° ist unendlich groß;**

denn

denn weil in dem Fall CE parallel mit AE wird (§. 59. Geom.), so stehen beyde gleich weit von einander und können sich also nicht schneiden (§. 61. Geom.); AE ist alsdann größer als jede endliche Größe, d. h. unendlich groß (§. 22. Arith.). 3) Die Tangente AE von 45° ist so groß als der Radius; denn wenn der Bogen AB = x = 45°, so ist das rechtwinklichte Dreyeck CAE ein gleichschenklichtes, oder AC = AE (§. 55. Geom.). Die Cotangente eines Bogens AB oder eines Winkels x ist die Linie GH, welche die Tangente seines Complements BG oder y ist. Ist der Bogen = 90°, so ist die Cotangente = 0; die Cotangente wächset, wenn der Bogen abnimmt, und ist der Bogen = 0, so ist die Cotangente unendlich groß, weil GH und CH dann parallel sind (§. 61. Geom.).

## §. 5.

Die **Sekante** eines Bogens AB oder eines Winkels x ist die Hypotenuse CE in dem rechtwinklichten Dreyeck CAE, dessen senkrechte Seiten die Tangente und der Radius sind. Die **Cosekante** ist die Hypotenuse in dem rechtwinklichten Dreyeck CGH, dessen Katheten die Cotangente GH und der Radius CG sind. Der **Sinus versus** ist das Stück von A bis D, wo der Sinus auf den Radius trifft. Der **Cosinus versus** ist das Stück GF von dem Endpuncte des Radius G bis an den Cosinus FB.

**Anmerk.** Der Kürze wegen bezeichnet man den Sinus von AB oder x mit Sin. AB oder Sin. x; den Cosinus mit Cos.; die Tangente und Cotangente mit Tang. und Cotang.; die Sekante und Cosekante mit Sec. und Cosec.; Sinus versus und Cosinus versus mit Sin. vers. und Cosin. vers. So bedeutet Cos. x + Tang. y die Summe des Cosinus des Winkels x und der Tangente des Winkels y; Sec. AB = CE bedeutet, daß die Sekante des Bogens AB = CE ist u. s. w.

## §. 6.

**Wenn zwey Winkel ACB und KCB oder zwey Bogen AB und KB zusammen 180° ausmachen, oder die Supplemente einer von dem andern sind: so haben sie gleichen Sinus und Cosinus, Tangente und Cotangente, Sekante und Cosekante, Sinus versus und Cosinus versus.**

Wenn man den Sinus des Bogens KB oder des stumpfen Winkels KCB finden will, so muß man von dem einen Ende des Bogens K eine senkrechte Linie KL auf den verlängerten Radius ziehen, und KL = Sin. KB (§. 2. und 5.) und Cos. KB = LC (§. 3.). Die Tangente von KB ist die senkrechte Linie KI, welche durch den verlängerten Radius CB bestimmt wird (§. 4.) oder Tang. KB = KI. Da nun x = m (§. 34. Geom.) und L = D = R, und CB = CK: so ist △ BCD =

△

△ CKL (§. 38. Geom.); ferner △ CAE = △ CKI; also BD = KL, oder Sin. AB = Sin. KB; AE = IK oder Tang. AB = Tang. KB; CD = CL oder Cos. AB = Cos. KB, und CI = CE, oder Sec. KB = Sec. AB. Ferner ist die Cotangente nichts anders als die Tangente des Complements (§. 4.), und da nun BG sowohl von AB als von IK das Complement ist, so ist Tang. BG = Cot. AB = Cot. KB. Die Cosekante wird durch den Radius und die Cotangente bestimmt (§. 5.), und da nun diese, wie bewiesen ist, für die Bogen AB und KB gleich groß ist, so ist Cosec. AB = Cosec. KB. Da endlich der Sinus versus der Unterschied zwischen dem Radius und dem Cosinus, und der Cosinus versus der Unterschied zwischen dem Radius und Sinus ist (§. 5.), und es bewiesen ist, daß Cos. AB = Cos. KB, und Sin. AB = Sin. KB, so ist auch R — Cos. AB = R — Cos. KB oder Sin. vers. AB = Sin. vers. KB, und R — Sin. AB = R — Sin. KB oder Cos. vers. AB = Cos. vers. KB.

**Anmerk.** Da also alle trigonometrische Linien, Sinus, Tangente, Sekante, Cosinus, Cotangente u. s. w. des Bogens AB im Quadranten ABG so groß sind, als Sinus, Tangente u. s. w. des Supplementbogens KB, so braucht man nur die trigonometrischen Linien für alle Grade, Minuten u. s. w. von 0° bis 90° oder für Einen Quadranten zu berechnen, um sie für alle mögliche Bogen zu haben. Sin. 120° =

= Sin. 60°; Cos. 150° = Cos. 30°; Tang. 140° = Tang. 40°; Cotang. 110° = Cotang. 76° u. s. w. Fürs erste muß also nun gezeigt werden, wie man den Sinus aller Winkel und Bogen von 0° bis 90° berechnet.

§. 7.

**Weiß man den Sinus eines Winkels, so kann man aus demselben alle trigonometrische Linien, Cosinus, Tangente, Cotangente u. s. w. bestimmen.**

1) $CB^2 = CD^2 + BD^2$ (§. 93. Geom.), also $CB^2 - BD^2 = CD^2$, und $\sqrt{(CB^2 - BD^2)} = CD$; aber $CB = AC = R$, und $BD = \text{Sin. } x$ (§. 2. und 5.) und $CD = \text{Cos. } x$ (§. 3.); folglich $\text{Cos. } x = \sqrt{(R^2 - \text{Sin. } x^2)}$.

2) $AD = CA - CD$; aber $AD = \text{Sin. verf. } x$ (§. 5.); also $\text{Sin. verf. } x = R - \text{Cos. } x$.

3) $GF = GC - FC$; aber $FG = \text{Cos. verf. } x$ (§. 5.); $CG = CA = R$ und $FC = BD = \text{Sin. } x$; also $\text{Cos. verf. } x = R - \text{Sin. } x$.

4) Da der Sinus BD und die Tangente AE beyde auf dem Radius senkrecht stehen (§. 2. und 4.) und also parallel sind (§. 59. Geom.), so ist $\triangle CDB \sim \triangle CAE$ (§. 148. Geom.) und $CD : DB = CA : AE$ oder $\text{Cos. } x : \text{Sin. } x = R : \text{Tang. } x$,

und

und also Tang. $x = \frac{R \cdot \text{Sin. } x}{\text{Cos. } x}$ oder die Tangente ist die vierte Proportionallinie zum Radius, Sinus und Cosinus (§. 98. Arith.).

5) Da FB mit GH parallel ist, so ist $\triangle$ CBF $\sim \triangle$ CGH; also CF : FB = CG : GH; aber CF = BD = Sin. x; FB = CD = Cos. x und CG = AC = R; also Sin. x : Cos. x = R : Cotang. x, oder die Cotangente ist die vierte Proportionallinie zum Sinus, Cosinus und Radius. Ferner ist GH parallel mit AC, also $x = n$ (§. 60. Geom.); ferner A = G, folglich $\triangle$ CAE $\sim \triangle$ CGH (§. 148. Geom.) und AE : AC = AC : GH, oder Tang. x : R = R : Cot. x, also $\frac{R^2}{\text{Tang. } x} = \text{Cot. } x$. oder die Cotangente ist die dritte Proportionallinie zur Tangente und zum Radius (§. 97. Arith.).

6) $CE^2 = AC^2 + AE^2$ (§. 93. Geom.), aber CE = Sec. x; folglich Sec. $x = R^2 + \text{Tang. } x^2$ und Sec. $x = \sqrt{(R^2 - \text{Tang. } x^2)}$. Ferner CD : CA = CB : CE (§. 141. Geom.) und Cos. x : R = R : Sec. x und $\frac{R^2}{\text{Cos. } x} = \text{Sec. } x$, oder die Sekante ist die dritte Proportionallinie zum Cosinus und Radius (§. 97. Arith.).

7) $CH^2 = CG^2 + GH^2$, aber CH = Cosec. x, daher Cosec. $x^2 = R^2 + \text{Cotang. } x^2$ und Cosec.

$\text{Sec. } x = \sqrt{(R^2 + \text{Cotang. } x^2)}$. Ferner $BD : CB = CG : CH$ oder $\text{Sin. } x : R = R : \text{Cosec. } x$ und $\frac{R^2}{\text{Sin. } x} = \text{Cosec. } x$, oder die Sekante ist die dritte Proportionallinie zum Sinus und Radius.

§. 8.

Wenn der Sinus eines ganzen Bogens AB (Fig. 248.) oder eines Winkels x gegeben ist, so ist der Sinus des halben Bogens oder des Winkels $\frac{1}{2}x$ der halben Quadratwurzel aus dem Quadrat des Sinus BD und dem Quadrat des Sinus versus AD gleich; oder $\text{Sin. } \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\sqrt{(\text{Sin. } x^2 + \text{Sin. verf. } x^2)}$.

Da BE nach der Bedingung $= \frac{1}{2}$ AB, so theilt CE die Chorde in zwey gleiche Theile, und steht auf derselben senkrecht (§. 106. 170. 108. Geom.), und $\frac{1}{2}$ AB = BF = FA. Da nun der Sinus BD des ganzen Bogens AB = Sin. x gegeben ist, so ist auch der Sinus versus dieses Winkels AD = Sin. verf. x gegeben (§. 7. Nr. 2.); aber $AB^2 = BD^2 + AD^2$ (§. 93. Geom.) und $AB = \sqrt{(BD^2 + AD^2)}$ und $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(BD^2 + AD^2)} = BF$, oder $\text{Sin. } \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\sqrt{(\text{Sin. } x^2 + \text{Sin. verf. } x^2)}$.

§. 9.

Wenn der Sinus AE (Fig. 249.) und also auch der Cosinus CE (§. 7. N. 1.) eines einfachen Bogens

gens AB = x gegeben ist, so ist der Sinus DE eines doppelt so großen Bogens AE = 2x die vierte Proportionallinie zum Radius, Cosinus des einfachen Bogens und dem zwiefachen Sinus desselben Bogens, oder R : Cos. x = 2 Sin. x : Sin. 2x.

In den Dreyecken CAF und EAD sind die Winkel bey F und D rechte Winkel, und der Winkel CAF beyden gemeinschaftlich, also △ CAF ∽ △ EAD (§. 148. Geom.) und CA : CF = AE : ED; aber AE = 2 AF = 2 Sin. x, also R : Cos. x = 2 Sin. x : Sin. 2x und Sin. $2x = \frac{\text{Cos. x . 2 Sin. x.}}{R}$

## §. 10.

Wenn der Sinus und Cosinus zweyer Bogen AB und BD (Fig. 250), oder zweyer Winkel x und y, nämlich BE = Sin. x, CE = Cos. x, DF = Sin. y und CF = Cos. y bekannt sind, so ist der Sinus DG der Summe dieser Bogen = Sin. (x + y) so groß, als die Summe der Producte aus dem Sinus des ersten Bogens in den Cosinus des zweyten, und dem Sinus des zweyten in den Cosinus des ersten, dividirt mit dem Radius oder Sin. (x + y) = $\frac{\text{Sin. x. Cos. y + Sin. y. Cos. x.}}{R}$

Man ziehe FH senkrecht auf AC, und FK senkrecht auf DG, so ist HK ein Rechteck, wo FH =

KG ist (§. 74. Geom.). △ CEB ∽ △ CHF und CB : BE = CF : FH oder KG (§. 148. Geom.), d. h., wenn man die trigonometrischen Bezeichnungen gebraucht, R : Sin. x = Cos. y : KG, also $KG = \frac{\text{Sin. x. Cos. y.}}{R}$ Ferner △ DFK ∽ △ DFL (§. 157. Geom.) Da die Verticalwinkel bey I gleich groß (§. 34. Geom.), und bey F und G rechte Winkel sind: so ist △ DFI ∽ △ CGI (§ 149 Geom.) ∽ △ CEB (§. 141. Geom.). Deswegen △ DFK ∽ △ CEB und CB : CE = DF : DK (§. 148. Geom.), oder R : Cos. x = Sin. y : DK und $DK = \frac{\text{Cos. x. Sin. y.}}{R}$

Hierzu addire man den vorhin gefundenen Werth von $KG = \frac{\text{Sin. x. Cos. y,}}{R}$ so ist $KG + DK = DG =$

$$\text{Sin.}(x+y) = \frac{\text{Sin. x. Cos. y}}{R} + \frac{\text{Sin. y. Cos. x}}{R}$$

$$= \frac{\text{Sin. x. Cos. y} + \text{Sin. y. Cos. x.}}{R}$$

## §. 11.

Wenn der Sinus und Cosinus eines ganzen Bogens AD = x, und eines Theils desselben AB = y (Fig. 251), nämlich DG = Sin. x, CG = Cos. x, AF = Sin. y und CF = Cos. y gegeben sind, so ist der Sinus des Unterschiedes dieser Bogen DL = Sin. (x — y) dem Unterschiede der Producte aus dem Sinus des ganzen Bo-

gens

gens in den Cosinus des Theils desselben und dem Sinus des Theils in den Cosinus des ganzen Bogens, dividirt durch den Radius, gleich, oder

$$\text{Sin.}(x - y) = \frac{\text{Sin. } x. \text{ Cos. } y - \text{Sin. } y. \text{ Cos. } x.}{R}$$

Man ziehe DL und GH senkrecht auf CB und GK parallel mit CB auf DLK, so ist HK ein Rechteck, wo HG = LK. Nun sind die Winkel bey F und G rechte Winkel und ACF gemeinschaftlich, daher △ ACF ∽ △ GCI (§. 149. Geom.) ∽ △ ILD ∽ △ GKD, also CA : CF = DG : DK oder R : Cos. y = Sin. x : DK und $DK = \frac{\text{Cos. } y. \text{ Sin. } x.}{R}$. Ferner △ ACF ∽ △ GCH (§. 141. Geom.), also AC : AF = CG : GH oder KL, d. h. R : Sin. y = Cos. x : KL und $KL = \frac{\text{Sin. } y. \text{ Cos. } x}{R}$. Daher KD — LK = $DL = \text{Sin.}(x - y) = \frac{\text{Sin. } x. \text{Cos. } y}{R} - \frac{\text{Sin. } y. \text{Cos. } x}{R} = \frac{\text{Sin. } x. \text{ Cos. } y - \text{Sin. } y. \text{ Cos. } x.}{R}$

## §. 12.

Es gibt noch mehrere und kürzere Methoden zur Berechnung der Sinus, welche sich aber ohne höhere Mathematik nicht erklären lassen; indeß kann man schon aus den hier bewiesenen Sätzen die Einrichtung der **Sinustafeln**, d. h. einer Sammlung von Tafeln über die Sinus, Cosinus, Tangente, Cotangente u. s. w.

für alle Grade und Minuten von 0° bis 90°, da sie für den stumpfen Winkel nicht nöthig sind (§. 6), verstehen. Da Sin. 30° so groß als der halbe Radius ist (§. 2), und dieser für gegeben angesehen wird, so weiß man auch Sin. 30°, und kann also durch beständiges Halbiren den Sinus von 15°, 7° 30′, 3°45′, 1° 52′ 30″, 0° 56′ 15″ u. s. w. bis $52\frac{3}{4}$″ finden (§. 8). Von diesem letzten Sinus kann man ohne merklichen Fehler annehmen, daß er so groß als sein Bogen sey, oder mit demselben zusammenfalle, und da die Sinus, welche nicht merklich von ihren Bogen abweichen, den Bogen proportionirt sind, so darf man schließen: wie $52\frac{3}{4}$″ sich zu dem gefundenen Sinus von $52\frac{3}{4}$ verhält, so auch 1′ : Sin. 1′, und findet man dergestalt Sin. 1′, so kann man Sin. 2′ (§. 9.), Sin. 3′ = Sin. (2′ + 1′) (§. 10), Sin. 4′ (§. 9), Sin. 5′, Sin. 6′ u. s. w. finden. Durch eine solche Anwendung der bewiesenen Lehrsätze (§. 8-12) kann man den Sinus aller Grade und Minuten von 0° bis 90° finden. Z. B. Sin. 45° = Sin. (30° + 15°); Sin. 20° = Sin. (30° — 10°); Sin. 25° = Sin. (45° — 20°); aus Sin. 20° findet man Sin. 10° (§. 8) und Sin. 40° (§. 9) u. s. w., und weil alle trigonometrische Linien für einen jeden Grad durch den Sinus desselben bestimmt werden (§. 7), so kann man aus dem gefundenen Sinus und Cosinus die Tangente und Cotangente, Se-

kante

kante und Cosekante, Sinus versus und Cosinus versus berechnen.

Anmerk. Schon die ältesten Astronomen sahen die Nothwendigkeit ein, ein Mittel zur Vergleichung der Winkel und Seiten eines Dreyecks zu haben, um die Länge der Seiten berechnen zu können. **Hipparch, Menelaus** und **Ptolemäus** brauchten dazu die ganzen Chorden, welche die Bogen ausspannen, die das Maaß der Winkel sind. In Ptolemæi Almagest. Lib. I. Cap. 9. findet man die allerälteſten ſolcher Tafeln. Die Araber gebrauchten ſtatt der ganzen Chorden die halben und führten alſo zuerſt den Gebrauch der Sinus ein. (Mohametis Albateni oder Albategnii de ſcientia ſtellarum Bononiæ 1545). Die andern trigonometriſchen Linien waren den Alten unbekannt. Sowohl die Griechen als die Araber theilten den Radius in 60 Theile, jeden derſelben in 60 Minuten, und jede dieſer wieder in 60 Sekunden, ſo daß der ganze Radius in $60 \cdot 60 \cdot 60 = 216000$ gleiche Theile getheilt ward. **Maurolicus** führte zuerſt den Gebrauch der Sekanten und **Regiomontan** der Tangenten ein. **Johann Regiomontanus** veränderte die Eintheilung. Er behielt zwar die Eintheilung des Radius in

60 Theile bey, theilte diese aber in Decimaltheile, so daß er dem Radius in allen 6000000 Theile gab, und diese seine Sinustafeln findet man am Ende seiner Libri V de triangulis planis et sphæricis. Nachher fand er, daß es weit bequemer sey, den Radius = 1 anzunehmen, und denselben in so viele Decimaltheile einzutheilen, als man für gut fände. Dieser Eintheilung ist man nachher immer gefolgt, woraus also folgt, daß Sin. $30° = \frac{1}{2} = 0,5$ (§. 2.), Sin. tot. = R = 1 und alle andere wirkliche Brüche sind. In Rücksicht der Tangenten ist Tang. $45° = R = 1$ (§. 4.); alle Tangenten von Winkeln unter 45° wirkliche Brüche oder $< 1$, und Tangenten von Winkeln über $45° > 1$. Georg Joachim Rheticus hat Regiomontanus Arbeit vollendet; man findet seine Sinustafeln in dem Opus Palatinum de triangulis a G. J. Rhetico coeptum L. Valentinus Otho concinnavit 1596 in Folio. Rheticus theilte den Radius in 10000000000 Theile, und berechnete Sinus, Tangente und Sekante für jede 10 Sekunden durch den ganzen Quadranten. Besonders ist es, daß er andere Namen brauchte, und den Sinus perpendiculum primum, die Tangente Perpendiculum

diculum ſecundum, den Coſinus Baſis, und die Sekante Hypotenuſa nannte. Viel bequemer richtete J. H. Maginus ſeine Sinustafeln ein, Magnus Canon Mathematicus, Bononiæ 1609 in Folio, wo man Sinus, Tangente, Sekante und Sinus verſus für alle Minuten des Quadranten für einen Radius von 10000000 Theile berechnet findet. Um ſich einen Begriff von der Berechnung der Sinus zu machen, wollen wir folgende Beyſpiele anführen:

Sin. 30° = 0,5000000000
Sin. 15° = 0,2588190451
Sin. 7° 30′ = 0,1305261922
Sin. 3° 45′ = 0,0654031292

Wenn man die Rechnung fortſetzte, würde man Sin. 1″ = 0.0000048481 finden. Unter den guten ältern Sinustafeln müſſen wir nicht Bartholomæi Pitiſci Trigonometria Lib. Vet Problematum Lib. X Francofurt. 1612 in 4. übergehn. Am Ende des Buches findet man Canon Triangulorum emendatiſſimus. Für den Radius = 10,000000. findet man berechnet den Sinus, die Tangente und Sekante für jede zweyte Sekunde der erſten 9 Minuten und für jede 10″ der übrigen Minuten des erſten Grades und für die übrigen Grade nur für jede Minute, aber mit Proportionaltheilen für 10″, woraus man den Sinus

u. ſ. w. für Sekunden herleiten kann. Gleichfalls auch Theſaurus Mathematicus ſeu Canon ſinuum ad radium 100000 00000 00000 et ad denaquæque ſcrupula quadrantis ſecunda cum differentiis primis et ſecundis olim a G. J. Rhetico ſupputatus, jam editus a B. Pitiſco. Francofurt. 1613 in Folio.

**Anmerk.** 2. In allen vorhin genannten Sinustafeln ſind die trigonometriſchen Linien in unſern gewöhnlichen Zahlen berechnet und werden von einigen **natürliche Sinus, Tangenten, Sekanten** u. ſ. w. genannt. Da es aber höchſt beſchwerlich iſt, mit ſo vielen Decimalen zu multiplicíren und zu dividiren, ſo zeigten die erſten Erfinder und Berechner der Logarithmen **Neper** und **Briggs** (§. 112. Arith.) die Nothwendigkeit, für die Sinus, Tangenten, Coſinus und Cotangenten Logarithmen zu berechnen, und dieſe nennt man **Logarithmen der Sinus** oder **logarithmiſche Sinustafeln** oder **künſtliche Sinustafeln**, und wenn man überhaupt ohne nähere Beſtimmung von Sinustafeln ſpricht, ſo verſteht man die logarithmiſchen oder künſtlichen Sinus. Um keine Logarithmen mit minus oder negative Logarithmen zu haben, hat man, wie in der Arithmetik (§. 120) erklärt iſt,

ist, die Charakteristik von log. 1 = 10 angenommen, da sie doch 0 seyn sollte, das heißt log. 1 = 10,0000000 statt = 0,0000000. Hieraus folgt, daß, wenn die Charakteristik in den Sinustafeln 9 ist, dies bedeutet, daß es Zehntheile sind; wenn derselbe 8 ist, daß keine Zehntheile, sondern Hundertheile da sind; wenn sie 7 ist, daß keine Zehn- und Hundertheile, sondern Tausendtheile da sind u. s. w. z. B. wenn der Radius = 10000000 ist, ist

nat. sin. 1″ = 0,0000048, log. sin. 1″ = 4,6855749
nat. sin. 1′ = 0,0002909, log. sin. 1′ = 6,4637261
nat. sin. 4° = 0,0697565, log. sin. 4° = 8,8435845
nat. sin. 24° = 0,4067366, log. sin. 24° = 9,6093133
nat. Tang. 10′ = 0,0029089, log. Tang. 10′ = 7,4637273
nat. Tang. 44° = 0,9656888, log. Tang. 45° = 9,9848372
nat. Tang. 45° = 1,0000000, log. Tang. 45° = 10,0000000
nat. Tang. 46° = 1,0355303, log. Tang. 46° = 10,0151628
nat. Tang. 89° = 57,2899617, log. Tang. 89° = 11,7580785

In den meisten logarithmischen Sinustafeln findet man die Zehner der Charakteristik der Tangente, wenn diese über 45° ist, ausgelassen, und Tang. 46° = 0,0151628 und Tang. 89° = 1,7580785 angeführt. Von den ältern Ausgaben der Sinustafeln führe ich nur allein diejenige an, welche, so zu sagen, die Stammutter aller übrigen ist: Arithmetica Logarithmica, sive Logarithmorum chiliades centum ab 1 usque

ad 100000 una cum canone triangulorum seu tabula artificialium sinuum, tangentium et secantium ad radium 10000000000 ad singula scrupula primæ quadrantis per Adrianum Vlacq. Goudæ 1628 in Folio. Die Logarithmen der Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten, Sekanten und Cosekanten findet man hier für jede Minute bis auf 10 Decimalen berechnet, und die Differenzen stehen zwischen ihnen. Nachher gab Vlacq Magnus canon triangulorum logarithmicus, Goudæ 1633 in Folio heraus, worin man die Logarithmen der Sinus und Tangenten für jede 10 Minuten berechnet findet. Nataniel Roe hatte zuerst den glücklichen Gedanken, die Logarithmen der Zahlen und Sinus auf eine bequeme Weise zu ordnen, und dieser Ordnung ist Sherwin in seinen Mathematical Tables, London 1705 gefolgt (Ward introduction to the Mathematicks, London 1740, Pag. 460.) Daraus sind nachher Sherwins Mathematical Tables contrived after a most comprehensive Method by William Gardiner, London 1742 in 4to entstanden. Man findet hier die Logarithmen der Sinus, Tangenten u. s. w. für jede zehnte Sekunde des ganzen Quadranten. Diese Ausgabe ist jetzt so selten geworden,

geworden, daß man sie nicht mehr bekommen kann. Der französische Mathematiker Pezenas gab eine französische Uebersetzung davon heraus: Tables de Logarithmes contenant les logarithmes des sinus & des tangentes de 10 en 10 secondes, publiées cidevant en Angleterre par M. Gardiner, nouvelle Edition. Avignon 1770, groß 4. Man findet die Logarithmen der Sinus und Tangenten für jede einzelne Sekunde der 4 ersten Grade und nachher für jede 10 Sekunde. Die neueste und vollständigste Ausgabe, welche die Logarithmen der Sinus und Tangenten für jede einzelne Sekunde des ganzen Quadranten enthält, ist folgende: Tables of Logarithms of all numbers from 1 to 101000 and of the Sines and Tangents to every second of the Quadrant by Michael Taylor, with a preface and precepts for the explanation and use of the same by Nevil Maskelyne. Lond. 1792, groß 4. Diese Ausgabe ist sehr correct und für diejenigen vorzüglich nützlich, welche oft mit trigonometrischen Berechnungen sich beschäftigen, indem man in den Tafeln den Logarithmen einer jeden Sekunde findet und nicht nöthig hat, denselben durch eine weitläuftige Berechnung zu suchen.

Anmerk. 3. Von Ausgaben von Sinustafeln in kleinerm Format und von niedrigerm Preiſe, die aber doch ſehr brauchbar ſind, kann man ſich folgende merken: Tables de Logarithmes pour les ſinus & les tangentes, Paris 1760 in 12. In dieſen findet man die Zahlenlogarithmen von 1 bis 10800, aber die Logarithmen der Sinus und Tangenten nur für jede Minute; aber an der Seite ſtehen Zahlen (eigentlich Differenzen für 10 Sekunden). Multiplicirt man dieſe Zahl mit der gegebenen Anzahl von Sekunden, z. B. 37″, und ſchneidet davon die beyden letzten Ziffern weg, ſo hat man den Proportionaltheil für die gegebenen Sekunden auf eine ſehr leichte Art. Dieſen Proportionaltheil addirt man zum Logarithmen der Minuten, welche der Winkel hat, z. B. 30° 21′, ſo hat man Log. 30° 21′ 37″. Um den Logarithmen eines Grades, einer Minute und Sekunde der erſten drey Grade zu finden, bedient man ſich einer andern ſehr bequemen Methode. Daß de la Caille und de la Lande die Ausgabe beſorgt haben, muß Beweis und Bürge für die Güte und Brauchbarkeit derſelben ſeyn. J. L. Schulzens neue und erweiterte Sammlung logarithmiſcher, trigonometriſcher und anderer Tafeln, Berlin 1778. 2 Bände in 8. Der erſte Band enthält die briggiſchen Logarithmen von 1 bis 100600,

100600, und die natürlichen oder hyperbolischen von 1 bis 10009, nebst den Logarithmen der Sinus und Tangenten der ersten zwey Grade für jede einzelne Sekunde. Der zweyte Band enthält die natürlichen und logarithmischen Sinus und Tangenten für alle Minuten des Quadranten, und um Proportionaltheile für die Sekunden zu finden, dieselbe Einrichtung, wie in de la Cailles Tafeln. **Logarithmische, trigonometrische und andere Tafeln und Formeln von G. Vega**, Wien 1783, 8. und Georgii Vega manuale logarithmico trigonometricum, Lipsiæ 1793 in 8. Diese sind in der Hauptsache eben so eingerichtet als die Schulzischen Tafeln und sehr brauchbar, besonders ist die neueste Ausgabe vortreflich. Tables portatives de logarithmes publiées à Londres par Gardiner, augmentées et perfectionées dans leur disposition et corrigées avec la plus scrupuleuse exactitude par M. Callet, Paris 1783 in 8. Sie enthalten die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 102990 und die Logarithmen der Sinus und Tangenten für jede 10″ durch den ganzen Quadranten. Diese vortreflichen Tafeln enthalten gänzlich dasselbe, was man in den kostbaren Ausgaben des **Gardiners** und **Pezenas** findet, sind noch überdies in

mancher Rücksicht viel bequemer eingerichtet, und unter den kleinern Ausgaben die vollkommensten und besten. Die Anwendung und den Gebrauch der logarithmischen Tafeln findet man von de la Caille, Schulz, Vega und Callet in der Einleitung zu ihren Tafeln vortreflich und deutlich erklärt, und es ist um so weniger nöthig, dies hier zu wiederholen, da es doch nicht verstanden werden kann, wenn man keine Tafeln hat, und hat man die Tafeln selbst, so wird die hier zu gebende Erklärung überflüßig seyn.

## Zweytes Kapitel.

### Auflösung rechtwinklichter Dreyecke.

§. 13.

Wenn in einem rechtwinklichten Dreyeck ABC (Fig. 252) die Hypotenuse AC und einer der spitzen Winkel A gegeben sind, so findet man die dem spitzen Winkel gegenüberstehende Seite CB durch folgende Proportion: so wie Sin. tot.: Hypotenuse AC = Sinus des spitzen Winkels: gegenüberstehende Seite CB, oder:

R : AC = Sin. A : CB.

Man

Man nehme AC als Radius an, beschreibe aus A als Mittelpunct den Bogen CD, und verlängere AB bis D, so ist AC = Sin. tot. und CB = Sin. A (§ 2); also R : AC = Sin. A : CB. Z. B. AC = 2360 Ellen und A = 34° 20′.

Log. 2360 = 3,3729120
Log. Sin. 34° 20′ = 9,7512842

13,1241962
Log. Sin. tot. = 10,0000000

Log. CB = 3,1241962
CB = 1331,5 Ellen.

**Anmerk.** Der Grund dieses Verfahrens mit den Logarithmen ist in der Arithmetik erklärt, nämlich $CB = \frac{CA \cdot Sin. A}{R}$ und wenn man sich der Logarithmen bedient, wodurch Multiplication in Addition und Division in Subtraction verwandelt wird, so ist Log. CB = Log. AC + Log. Sin. A — Log. R (§. 116. Arith.). Im vorigen Beyspiel ist die Rechnung ausführlich hingesetzt und Log. R oder Log. Sin. tot. = 100000000, dessen Subtraction dadurch geschieht, daß man 10 von der Charakteristik der Summe subtrahirt und diese Subtraction soll künftig nur dadurch angedeutet werden, daß die Zahl von der Ordnung der Zehner durchgestrichen wird.

§. 14.

§. 14.

**Wenn in einem rechtwinklichten Dreyeck** ABC (Fig. 253) **die Hypotenuse** AC **und eine der Katheten** AB **bekannt sind, so findet man den an derselben liegenden Winkel** A **durch folgende Proportion: Wie** AC **zu** AB **so Sinus totus zu Cosinus von** A, **oder:**

AC : AB = Sin. tot. : Cos. A.

Beschreibt man aus A als einem Mittelpuncte mit dem Radius AC den Bogen CD, so ist AC = R = Sin. tot. und AB = Cos. A (§. 3.); also AC : AB = R : Cos. A.

Z. B. AC = 4000 Ellen; AB = 2000 Ellen.

| | | |
|---|---|---|
| Log. Sin. tot. | = | 10,0000000 |
| Log. 2000 | = | 3,3010300 |
| | | 13,3010300 |
| Log. 4000 | = | 3,6020600 |
| Log. Cos. A | = | 9,6989700 |
| A | = | 60° |

§. 15.

**Wenn in einem rechtwinklichten Dreyeck ein spitzer Winkel** A (Fig. 254) **und die demselben gegenüberstehende Kathete** BC **gegeben sind, so findet man die Hypotenuse** AC **durch folgende Proportion: Wie Sinus von** A **zu** BC, **so Sinus totus zur Hypotenuse, oder:**

Sin. A : BC = R : AC.

Der

Der Beweis folgt aus §. 13, von welcher Proportion diese nur eine Umsetzung ist.

Z. B. BC = 4524 Ellen; A = 54° 20′

Sin tot. = 10,0000000

Log. 4525 = 3,6555226

13,6555226

Log Sin. 54° 20′ = 9,9097821

Log. AC = 3,7457405

AC = 5568,6 Ellen.

§. 16.

**Wenn eine der Katheten AB und der anderselben liegende spitze Winkel A (Fig. 255) gegeben sind, so findet man die andere Kathete durch folgende Proportion: Wie der Sinus totus zur Tangente von A, so AB zu BC, oder**

R : Tang. A = AB : AC.

Aus A, als dem Mittelpuncte, beschreibe man mit dem Radius AB einen Bogen, so ist AB = R = Sin. tot. und BC = Tang. A (§. 4); also R : Tang. A = AB : BC.

Z. B. AB = 46836 Ellen; A = 41° 40′ 20″

Log. Tang. 41° 40′ 20″ = 9,9494379

Log. 46836 = 4,6705798

Log. BC = 4,6200177

BC = 41688,6 Ellen.

§. 17.

§. 17.

Wenn beyde Katheten AB und BC (Fig. 256) gegeben sind, so findet man den spitzen Winkel A durch folgende Proportion: Wie AB : BC so Sinus totus zur Tangente von A, oder:

AB : AC = Sin. tot. : Tang. A.

Diese Proportion ist die umgekehrte von der vorhergehenden (§. 16).

Z. B. AB = 500 Fuß; BC = 896 Fuß.

Log. Sin. tot. = 10,0000000
Log. 896 = 2,9523080

12,9523080
Log. 500 = 2,6989700

Log. Tang. A = 10,2533280; A = 60° 40′ 13″.

§. 18.

Wenn in einem rechtwinklichten Dreyeck die Hypotenuse AC und die eine Kathete BC bekannt sind, die andere Kathete zu finden (Fig. 257).

1) Man suche den Winkel A durch folgende Proportion:

AC : R = CB : Sin. A (§. 15).

2) Wenn man auf die Art den Winkel A gefunden hat, so suche man AB durch folgende Proportion:

R : Col. A = AC : AB (§. 14).

Z. B.

Z. B. AC = 6250 Ellen; BC = 1240 Ellen

AC : R = CB : Sin. A

6250 : R = 1240 : Sin. A

Log. sin. tot. = 10,0000000

Log. 1240 = 3,0934217

13,0934217

Log. 6250 = 3,7958800

Log. sin. A = 9,2975417

A = 11° 26′ 36″

Ferner R : Col. A = AC : AB

R : Col. 11° 26′ 36″ = 6250 : AB

Log. 6250 = 3,7958800

Log. col. 11° 26′ 36″ = 9,9912803

Log. AB = 3,7871603

AB = 6125,8 Ellen.

## §. 19.

**Wenn in einem rechtwinklichten Dreyeck beyde Katheten AB und BC bekannt sind, die Hypotenuse AC zu finden (Fig. 258).**

1) Man sucht zuerst den Winkel A durch folgende Proportion: AB : BC = R : Tang. A (§. 17).

2) Hat man den Winkel A gefunden, so findet man die Hypotenuse durch folgende Proportion: Sin. A : BC = R : AC (§. 15).

Z. B. AB = 300 Fuß; BC = 400 Fuß

AB : BC = R : Tang. A

300 : 400 = R : Tang. A

Log. 400 + Log. R = 12,6020600

Log. 300 = 2,4771215

Log. tang. A = 10,1249387

A = 53° 7′ 48″

Sin. A : BC = R : AC

Sin. 53° 7′ 48″ : 400 = R : AC

Log. 400 + R = 12,6020600

Log. fin. 53° 7′ 48″ = 9,9030894

Log. AC = 2,6989706

AC = 500 Fuß.

**Anmerk.** Diese letzte Aufgabe läßt sich auch durch die Geometrie auflösen; denn $AC^2$ (Fig. 257.) $= AB^2 + BC^2$ (§. 93. Geom.) und $AC = \sqrt{(AB^2 + BC^2)}$ und in dem gegebenen Beyspiel $AC = \sqrt{(300^2 + 400^2)} = \sqrt{(90000 + 160000)} = \sqrt{250000} = 500$. Die zunächst vorhergehende Aufgabe (§. 18.) läßt sich auch durch den Pythagorischen Lehrsatz auflösen, und $AB = \sqrt{(AC^2 - BC^2)}$, welchen Ausdruck man durch Logarithmen auflösen kann, wenn man $AC^2 - BC^2 = (AC + BC).(AC - BC)$ setzt, wo dann AB durch Logarithmen ausgedruckt wird, oder Log. AB

=

$$= \frac{\text{Log.}(AC + BC) + \text{Log.}(AC - BC)}{2}$$

(§. 113. Arith.). Das §. 18. angeführte Beyspiel wird dann nach diesem Verfahren folgendergestalt ausfallen:

| | |
|---|---|
| $AC = 6250$ | $AC = 6250$ |
| $BC = 1240$ | $BC = 1240$ |
| $AC + BC = 7490$ | $AC - BC = 5010$ |

$\log.(AC + BC) = \log. 7490 = 3{,}8744818$
$\log.(AC - BC) = \log. 5010 = 3{,}6998377$

$\log.(AC^2 - BC^2) = \log.(7490.5010) = 7{,}5743195$

$\log. AB = \frac{1}{2}\log.(AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2}\log.(7490.5010) =$
$3{,}7871598$
$AB = 6125{,}7.$

Der unbedeutende Unterschied zwischen diesem Logarithmen und dem Logarithmen in §. 18. hat seinen Grund in der Ungewißheit der letzten Decimalen der Logarithmen; will man denselben genauer haben, so muß man Logarithmen mit mehrern Decimalen gebrauchen (§. 112. Arith.).

## §. 20.

Diese Aufgaben sind der Grund der Auflösung aller rechtwinklichten Dreyecke, welche in den gegebenen Beyspielen hinlänglich aufgelöst sind. Aller möglichen Fälle, welche bey rechtwinklichten Dreyecken Statt finden kön-

nen, sind 21 und in der folgenden Tabelle enthalten, wozu eine der Figuren von 252 bis 258 gehört.

| Fälle. | gegebene Stücke. | gesuchte Stücke. | Proportion oder Rechnungsregel. |
|---|---|---|---|
| 1 | AB, BC | AC | AB : BC = R : Tang. A und Sin. A : BC = R : AC (§. 19.) |
| 2 | | A | AB : BC = R : Tang. A (§. 17.) |
| 3 | | C | BC : AB = R : Tang. C (§. 17.) |
| 4 | AB, AC | BC | Log. BC = ½ Log. (AC + AB) + ½ Log. (AC — AB) (§. 19.) |
| 5 | | A | AC : AB = R : Cof. A (§. 14.) |
| 6 | | C | AC : AB = R : Sin. C (§. 13.) |
| 7 | AC, BC | AB | Log. AB = ½ Log. (AC + BC) + ½ Log. (AC — BC) (§. 19.) |
| 8 | | A | AC : R = BC : Sin. A (§. 13.) |
| 9 | | C | AC : BC = R : Cof. C (§. 14.) |
| 10 | AB, A | BC | R : Tang. A = AB : BC (§. 17.) |
| 11 | | AC | Cof. A : R = AB : AC (§. 14.) |
| 12 | AB, C | BC | Tang. C : R = AB : BC (§. 17.) |
| 13 | | AC | Sin. C : AB = R : AC (§. 13.) |
| 14 | BC, A | AB | Tang. A : R = BC : AB (§. 17.) |
| 15 | | AC | Sin. A : BC = R : AC (§. 13.) |
| 16 | BC, C | AB | R : Tang. C = BC : AB (§. 17.) |
| 17 | | AC | Cof. C : R = BC : AC (§. 14.) |
| 18 | AC, A | AB | R : Cof. A = AC : AB (§. 14.) |
| 19 | | BC | R : AC = Sin. A : BC (§. 13.) |
| 20 | AC, C | AB | R : AC = Sin. C : AB (§. 13.) |
| 21 | | BC | R : Cof. C = AC : BC (§. 14.) |

# Drittes Kapitel.

## Auflösung schiefwinklichter Dreyecke.

### §. 21.

In jedem ebenen rechtwinklichten Dreyeck ABC (Fig. 259) verhalten sich die Seiten AC und BC, wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel, d. h., wie der Sinus von B zum Sinus von A, oder AC : BC = Sin. B : Sin. A.

Man beschreibe nun das gegebene Dreyeck einen Kreis, dessen Mittelpunct D ist. Dann ziehe man auf die Chorden AC und BC die Perpendicularen DE und DF. Diese theilen sowohl die Chorden als auch die Bogen in gleiche Theile (§. 108. Geom.), so daß 2 CE = AC und 2 BF = CB; ferner $x = \frac{1}{2}$ ADC und $y = \frac{1}{2}$ CDB. Nun ist der ganze Winkel an der Peripherie so groß als der halbe Centriwinkel (§. 121. Geom.), oder $\frac{1}{2}$ ADC = B und $\frac{1}{2}$ CDB = A, woraus folgt, daß x = B und y = A. Aus der Natur der trigonometrischen Linien ist es klar, daß CE der Sinus von x und BF der Sinus von y ist (§. 2.), oder BF = Sin. y = Sin. A und CE = Sin. x = Sin. B, also Sin. B : Sin. A = CE : BF = 2 CE : 2 BF = AC : CB.

§. 22.

Wenn in einem schiefwinklichten Dreyeck eine Seite AB und der Winkel C, welcher der Seite AB gegenüberliegt, und überdieß noch ein an derselben liegender Winkel A gegeben sind, die diesem gegenüberliegende Seite CB zu finden (Fig. 260).

Man setze folgende Proportion auf: wie der Sinus des Winkels C sich verhält zur gegenüberliegenden Seite AB, so verhält sich der Sinus des zweyten gegebenen Winkels A zu der ihm gegenüberliegenden Seite BC, oder

Sin. C : AB = Sin. A : BC (§. 21).

z. B. AB = 2354 Ellen, A = 32° 20′, C = 50° 34′

Sin. 50° 34′ : 2354 = Sin. 32° 20′ : BC

Log. 2354 = 3,371806

Log. Sin. 32° 20′ = 9,728227

13,100033

Log. Sin. 50° 34′ = 9,887822

Log. BC = 3,212211

BC = 1630,1 Ellen.

§. 23.

Es sind die Grundlinie und beyde Winkel an derselben gegeben; man soll die beyden Seiten BC und AC (Fig. 261) finden.

1) Wenn

1) Wenn man die beyden Winkel an der Grundlinie addirt, und ihre Summe von zwey rechten Winkeln oder 180° subtrahirt: so findet man den Winkel C, welcher der Grundlinie AB gegenüberliegt. (§. 67. Geom.)

2) Man hat dann dieselben gegebenen Stücke wie §. 22, und also Sin. C : AB = Sin. A : BC und Sin. C : AB = Sin. B : AC.

Z. B. AB = 10070 Ellen, A = 57° 54′ 45″ und B = 53° 14′ 3″, so suche man zuerst den Winkel C.

A = 57° 54′ 45″
B = 53° 14′ 3″

A + B = 111° 8′ 48″
A + B + C = 179° 59′ 60″

C = 68° 51′ 12″

Sin. C : AB = Sin. A : BC
Sin. 68° 51′ 12″ : 10070 = Sin. 57° 54′ 45″ : BC
Log. 10070 = 4,0030295
Log. Sin. 57° 54′ 45″ = 9,9280053

13,9310348
Log. Sin. 68° 51′ 12″ = 9,9697233

Log. BC = 3,9613115
BC = 9147,7 Ellen.

Sin. 68° 51′ 12″ : 10070 = Sin. 53° 14′ 3″ : AC

Log. 10070 = 4,0030295

Log. Sin. 53° 14′ 3″ = 9,9036804

13,9067099

Log. Sin. 68° 51′ 12″ = 9,9697233

Log. AC = 3,9369866

AC = 8649,4.

§. 24.

In einem Dreyeck ABC (Fig. 262) sind zwey Seiten AB und BC und ein der einen der gegebenen Seiten gegenüberliegender Winkel C gegeben; man soll den der andern gegebenen Seite BC gegenüberliegenden Winkel A finden.

Man findet den Winkel A durch folgende Proportion:

AB : Sin. C = CB : Sin. A.

Z. B. AB = 5394 Ellen; C = 56° 30′ und CB = 4876 Ellen.

5394 : Sin. 56° 30′ = 4876 : Sin. A

Log. 4876 = 3,688064

Log. Sin. 56° 30′ = 9,921107

13,609171

Log. 5394 = 3,731911

Log. Sin. A = 9,877260

A = 48° 55′ 16″.

An-

Anmerk. Wenn man auf die Art den Winkel A gefunden hat und die Summe oder A + C von 180° subtrahirt, so findet man den dritten Winkel B (§. 67. Geom.), woraus man die dritte Seite AC berechnen kann, nämlich Sin. C : AB = Sin. B : AC (§. 22). Auf die Art findet man dann alle Seiten und und Winkel in △ ABC; übrigens bemerke man, daß wenn man einen Winkel suchen will, man die Proportion mit einer Seite und wenn man eine Seite berechnen will, die Proportion mit einem Winkel anfangen muß.

## §. 25.

Es gibt zwey ungleiche Größen M = 8 und m = 2, deren Summe S = M + m = 10 und Differenz M — m = D = 6 man weiß, so ist die größere Größe M der halben Summe und der halben Differenz gleich oder $M = \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}D = \frac{10}{2} + \frac{6}{2} = 5 + 3 = 8$, und die kleinere Größe der halben Summe weniger der halben Differenz gleich, oder $m = \frac{1}{2}S - \frac{1}{2}D = \frac{10}{2} - \frac{6}{2} = 5 - 3 = 2$.

1) S = M + m und D = M — m, diese addire man, so erhält man S + D = 2 M + m — m = 2 M; folglich $M = \frac{S + D.}{2}$

2) M + m = S; statt M setze man dessen Werth $= \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}D$, also $\frac{1}{2}S + \frac{1}{2}D + m = S$;

man subtrahire auf beyden Seiten $\frac{1}{2}$ S, so ist $\frac{1}{2}$ D + m = S — $\frac{1}{2}$ S = $\frac{1}{2}$ S; man subtrahire $\frac{1}{2}$ D auf beyden Seiten, so ist endlich m = $\frac{1}{2}$ S — $\frac{1}{2}$ D.

§. 26.

Es sind in einem Dreyeck ABC (Fig. 263) zwey Seiten AB und AC nebst dem eingeschlossenen Winkel BAC oder A bekannt; man soll die übrigen Winkel C und B finden.

1) Man addire die beyden gegebenen Seiten und suche ihre Summe AB + AC.

2) Man subtrahire sie von einander und suche ihre Differenz AB — AC.

3) Man ziehe den gegebnen Winkel von 180° ab, so hat man die Summe der beyden unbekannten Winkel C + B (§. 66. Geom.)

4) Man setze folgende Proportion auf: wie die Summe der Seiten AB + AC zu ihrem Unterschiede AB — AC, so die Tangente der halben Summe der unbekannten Winkel zu der Tangente der halben Differenz eben dieser Winkel, oder

AB + AC : AB — AC = Tang. $\frac{1}{2}$ (C + B) : Tang. $\frac{1}{2}$ (C — B).

5) Hat man auf die Art die halbe Differenz der unbekannten Winkel $\frac{1}{2}$ C — $\frac{1}{2}$ B gefunden, so addire

dire man zu der halben Summe $\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}B$ die halbe Differenz, so hat man den gröſsern der unbekannten Winkel $= C$, und subtrahirt man von der halben Summe die halbe Differenz, so hat man den kleinern der unbekannten Winkel $= B$ (§. 25).

**Beweis.** Das, was in dieser Auflösung eines Beweises bedarf, ist die Num. 4 angeführte Proportion, welche folgendergestalt bewiesen wird. Aus A, als Mittelpuncte, und mit der kleinern Seite AC, als Radius, beschreibe man einen Kreis, so ist BF die Summe der gegebenen Seiten $= AB + AC$, denn $BF = AB + AF = AB + AC$ (§. 14. Geom.), und DB ist die Differenz der gegebenen Seiten, denn $DB = AB - AD = AB - AC$. Man ziehe FC und CD nebst DE parallel mit FC (§. 65. Geom.). Da $AC = AD$, so ist $x = y$ (§. 39. Geom.); aber $y = m + n$ (§. 66. Geom.), also $x = m + n$. Man subtrahire zuerst m auf beyden Seiten, so ist $x - m = n$, dann addire man n auf beyden Seiten, so ist $x + n - m = 2n$; aber $x + n = ACB = C$ und $m = ABC = B$, also $C - B = 2n$ und $\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}B = n$, oder n die halbe Differenz der unbekannten Winkel. Ferner ist $z = ACB + ABC$ (§. 66. Geom.) im $\triangle ABC$, aber im $\triangle ADC$ ist $z = x + y = 2y$ und $\frac{1}{2}z = y$; also $\frac{1}{2}z = y = \frac{1}{2}ACB + \frac{1}{2}ABC = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}B$, oder y die halbe

Summe

Summe der unbekannten Winkel. Da ferner der Winkel FCD ein Winkel in einem Halbkreise ist, so ist FCD = 90° (§. 122. Geom.), also FC senkrecht auf CD, und nimmt man CD als Radius an, so ist FC = Tang. y = Tang. ($\frac{1}{2}$C + $\frac{1}{2}$B) (§. 4.). Nun ist FC parallel mit DE (vermöge der Construction), und die Wechselwinkel FCD und CDE gleich groß (§. 60. Geom.); ist daher CD der Radius, so ist DE = Tang. n = Tang. ($\frac{1}{2}$C — $\frac{1}{2}$B). Da ferner DE mit FC parallel ist, so ist △ BFC ∽ △ BDE und BF : BD = FC : DE (§. 148. Geom.), aber BF = AB + AC und BD = AB — AC, nach dem, was vorhin bewiesen ist, daher AB + AC : AB — AC = Tang. ($\frac{1}{2}$C + $\frac{1}{2}$B) : Tang. ($\frac{1}{2}$C — $\frac{1}{2}$B).

Z. B. AB = 693 Fuß, AC = 539 Fuß, A = 41° 37′

| | |
|---|---|
| AB = 693 | A + C + B = 179° 60′ |
| AC = 539 | A = 41° 37′ |

| | |
|---|---|
| AB + AC = 1232 Fuß | C + B = 138° 23″ |
| AC — AC = 154 — | $\frac{1}{2}$C + $\frac{1}{2}$B = 69° 11′ 30″ |

1232 : 154 = Tang. 69° 11′ 30″ : Tang. ($\frac{1}{2}$C — $\frac{1}{2}$B)

Log. 154 = 2,1875207

Log. Tang. 69° 11′ 30″ = 10,4201812

12,6077019

Log. 1232 = 3,0906107

Log. Tang. ($\frac{1}{2}$C — $\frac{1}{2}$B) = 9,5170912

$\frac{1}{2}$C

$\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}B = 18^\circ\ 12'\ 26''$
$\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}B = 69^\circ\ 11'\ 30''$

$C = 87^\circ\ 23'\ 56''$
$B = 50^\circ\ 59'\ 4''$

Auf diese Art hat man die beyden Winkel C und B gefunden. Will man nun noch die dritte Seite finden, so geschieht das durch folgende Proportion:

Sin. B : AC = Sin. A : BC (§. 22.)
Sin. $50^\circ\ 59' 4''$ : 539 = Sin. $41^\circ\ 37$ : BC
Log. 539 = 2,7315888
Log. Sin. $41^\circ\ 37' = 9{,}8222621$

12,5538509
Log. Sin. $50^\circ\ 59' 4'' = 9{,}8904071$

Log. BC = 2,6634438
BC = 460,73 Fuß.

§. 27.

**Wenn in einem Dreyeck zwey Seiten AB und AC (Fig. 264) nebst dem eingeschlossenen Winkel A bekannt sind, so kann man noch auf eine andere und folgende Art die beyden andern Winkel B und C finden.**

1) Wie die kleinste Seite AC sich zur größten Seite AB verhält, so verhält sich der Sinus totus zur Tangente eines Winkels c.

2) Von diesem Winkel ziehe man $45^\circ$ ab, so hat man den Unterschied $x = c - 45^\circ$.

3) Fer-

3) Ferner: wie der Sinus totus zur Tangente (c — 45°) oder Tangente x, so die Tangente der halben Summe der gesuchten Winkel zur Tangente der halben Differenz derselben.

4) Aus der halben Summe und der gefundenen halben Differenz findet man den größern Winkel C und den kleinern B.

Z. B. AB = 693 Fuß, AC = 539, A = 41° 37′, AB + AC = 1232 Fuß, AB — AC = 154, $\frac{1}{2}$C + $\frac{1}{2}$B = 69° 11′ 30″ (§. 26. Beysp.).

AC : AB = R : Tang. c

539 : 693 = Sin. tot. : Tang. c

Log. sin. tot. + Log. 693 = 12,8407332

Log. 539 = 2,7315888

Log. tang. c = 0,1091444

c = 52° 7′ 30″

45° = 45°

x = c — 45° = 7° 7′ 30″

R : Tang. (c — 45°) = Tang. ($\frac{1}{2}$C + $\frac{1}{2}$B) : Tang. ($\frac{1}{2}$C — $\frac{1}{2}$B)

Sin. tot. : 7° 7′ 30″ = Tang. 69° 11′ 30″ : Tang. ($\frac{1}{2}$C — $\frac{1}{2}$B)

Log. tang. 69° 11′ 30″ = 10,4201812

Log. tang. 7° 7′ 30″ = 9,0969090

Log. tang. ($\frac{1}{2}$C — $\frac{1}{2}$B) = 9,5170902

$\frac{1}{2}$C — $\frac{1}{2}$B = 18° 12′ 26″

eben so, wie vorher.

Be-

**Beweis.** Mit der kleinern gegebenen Seite als dem Radius beschreibe man einen Kreis; errichte auf AB den senkrechten Radius Ac und ziehe Bc, so ist $cAB = 90°$, $c + b = 90°$ und $\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}b = 45°$. In den Dreyecken ABC und Abc ist $AB = Ab$ und $Ac = AC$, also sind auch die Summe und Differenz dieser Seiten gleich. Nun ist es aber bewiesen, daß im $\triangle$ ABC ist $AB + AC : AB - AC = \text{Tang.}(\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}B) : \text{Tang.}(\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}B)$ und gleichfalls im $\triangle$ Abc $Ab + Ac : Ab - Ac = \text{Tang.}(\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}b) : \text{Tang.}(\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b)$ (§. 26.); also $\text{Tang.}(\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}B) : \text{Tang.}(\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}B) = \text{Tang.}(\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}b) : \text{Tang.}(\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b)$; aber $\text{Tang.}(\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}b) = \text{Tang.}\,45° = R$ (§. 4.). Ferner $c = c$, wovon man auf beyden Seiten $\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}b = 45°$ abzieht; daher $R : \text{Tang.}(c - 45°) = \text{Tang.}(\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}B) : \text{Tang.}(\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}B)$, woraus folgt, daß man zuerst den Winkel c suchen, von diesem 45° abziehen, und dann auf die in der Auflösung gebrauchte Art die halbe Differenz der unbekannten Winkel suchen müsse.

**Anmerk.** Obgleich man bey dieser letzten Auflösung zwey Proportionen gebrauchen muß, so ist dieselbe doch sehr bequem, und wird beständig in der Astronomie bey Berechnungen der Planeten u. s. w. gebraucht.

## §. 28.

**Es sind in einem Dreyeck ABC alle Seiten gegeben; man soll die Winkel finden (Fig. 265).**

1) Aus der Spitze des größten Winkels C fälle man eine senkrechte Linie CG auf die gegenüberliegende größte Seite AB herab, und beschreibe aus C, als Mittelpuncte, mit der kleinsten Seite BC, als Radius, einen Kreis.

2) Man setze folgende Proportion auf: wie die größte Seite AB zur Summe der beyden andern Seiten AC + CB, so dieser Seiten Unterschied AC — CB zu dem Stück der Linie AB, welches außerhalb des Kreises liegt, AF.

3) Dies Stück AF subtrahire man von AB, so hat man BF, und $\frac{1}{2}$BF = FG = BG (§. 108. Geom.) und AG = AF + FG = AF + $\frac{1}{2}$FB.

4) In dem rechtwinklichten Dreyeck BCG findet man den Winkel B durch folgende Proportion: CB : BG = R : Cos. B (§. 14).

5) In dem rechtwinklichten Dreyeck AGC sucht man den Winkel A durch folgende Proportion: AC : AG = R : Cos. A (§. 14).

6) Endlich findet man BCA = 180° — (A + B) (§. 67. Geom.).

**Beweis.** Das, was in dieser Auflösung eines Beweises bedarf, ist: AB : AC + CB = AC — CB : AF.

AF. Nun ist aber AD = AC + CD = AC + CB und AE = AC — CE = AC — CB; ferner x = ½ EDB und y = ½ BFE (§. 122. Geom.); also x + y = ½ EDB + ½ BFE = 180° (§. 20. Geom.) = m + x (§. 31. Geom.); also wenn man x subtrahirt, bleibt y = m. Es ist ferner der Winkel A beyden Dreyecken ABD und AEF gemeinschaftlich; also △ ABD ∽ △ AEF (§. 149. Geom.) und AB : AD = AE : AF oder AB : AC + CB = AC — CB : AF.

Beyspiel: AC = 354 Fuß, BC = 346, AB = 625.

| | |
|---|---|
| AC = 354 | AC = 354 |
| BC = 346 | BC = 346 |
| AC + BC = 700 | AC — BC = 8 |

AB : AC + BC = AC — BC : AF

625 : 700 = 8 : AF

Log. 8 = 0,9030900

Log. 700 = 2,8450980

3,7481880

Log. 625 = 2,7958800

Log. AF = 0,9523080

AF = 8,96 Fuß

AB = 625

AF = 8,96

BF = 616,04 Fuß

$BG = \frac{1}{2} BF = 308{,}02$

$AG = AF + \frac{1}{2} BF = 316{,}98$

$CB : BG = R : \text{Cof. } B$

$346 : 308{,}02 = \text{Sin. tot.} : \text{Cof. } B$

$\text{Log. fin. tot.} + \text{Log. } 308{,}02 = 12{,}4885789$

$\text{Log. } 346 = 2{,}5390761$

$\text{Log. cof. } B = 9{,}9495028$

$B = 27° 5' 52''$

$AC : AG = R : \text{Cof. } A$

$354 : 316{,}98 = \text{Sin. tot.} : \text{Cof. } A$

$\text{Log. fin. tot.} + \text{Log. } 316{,}98 = 12{,}5000319$

$\text{Log. } 354 = 2{,}5490033$

$\text{Log. cof. } A = 9{,}9510286$

$A = 26° 16' 14''$

$B = 27° 5' 52''$

$A = 26° 16' 14''$

$B + A = 53° 32' 6''$

$C + B + A = 179° 59' 60''$

$C = 126° 27' 54''$

## §. 29.

Zum Schluß füge ich noch eine Tabelle an, welche alle Fälle schiefwinklichter Dreyecke enthält, selbst die, welche zweydeutig sind, oder nicht vollkommen ein Dreyeck bestimmen, und mehr als ein Resultat geben.

Fälle.

| Fälle. | Gegebene Stücke. | Gesuchte Stücke. | Proportion oder Rechnungsregel. |
|---|---|---|---|
| 1. Fig. 266. | Die Winkel A, B, C und die Seite AB. | Die Seiten BC und AC. | sin. C : AB = sin. A : BC<br>sin. C : AB = sin. B : AC } (§. 22)<br>aber wenn zwey Winkel gegeben sind, so ist auch der dritte Winkel gegeben; also gehört auch der Fall hieher, wenn zwey Winkel und eine Seite gegeben sind, und man das übrige finden soll. |
| 2. Fig. 267. | Alle drey Winkel A, B, C, aber keine Seite. | Die Seiten AB, BC, CA. | sin. C : sin. A = AB : BC<br>sin. C : sin. B = AB : AC } (§. 21)<br>woraus man sieht, daß wenn nur die Winkel gegeben sind, man nur das Verhältniß der Seiten, aber nicht die Seiten selbst finden könne, es sey denn, daß eine derselben gegeben ist. |
| 3. Fig. 268. | Die zwey Seiten AB, BC, und ein der einen dieser Seiten gegenüberliegender Winkel C. | Die Winkel A und B. | AB : sin. C = BC : sin. A (§. 21) dieser Fall ist zweydeutig, wenn man nicht weiß, ob A ein spitzer oder stumpfer Winkel ist. Denn beschreibt man aus B mit dem Radius einen Bogen, welcher AC in a schneidet, so hat das stumpfwinklichte Dreyeck aCB dieselben gegebenen Stücke, als das spitzwinklichte ABC, und da Supplementwinkel einerley Sinus haben (§. 6.), so paßt der gefundene Sinus sowohl zum stumpfen Winkel bey a, als zum spitzen A. |

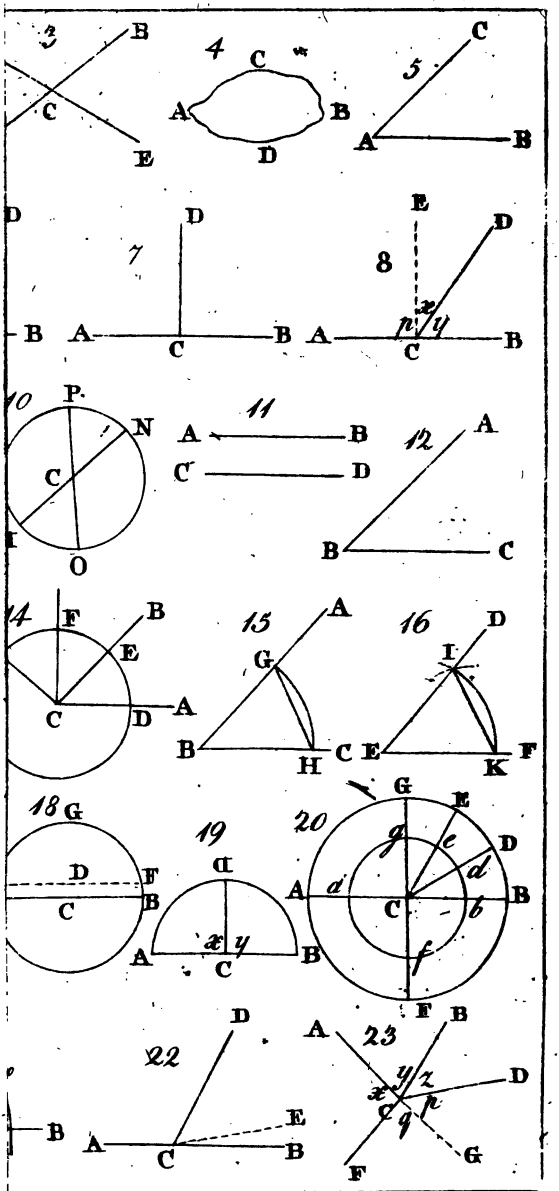
4. Fig.

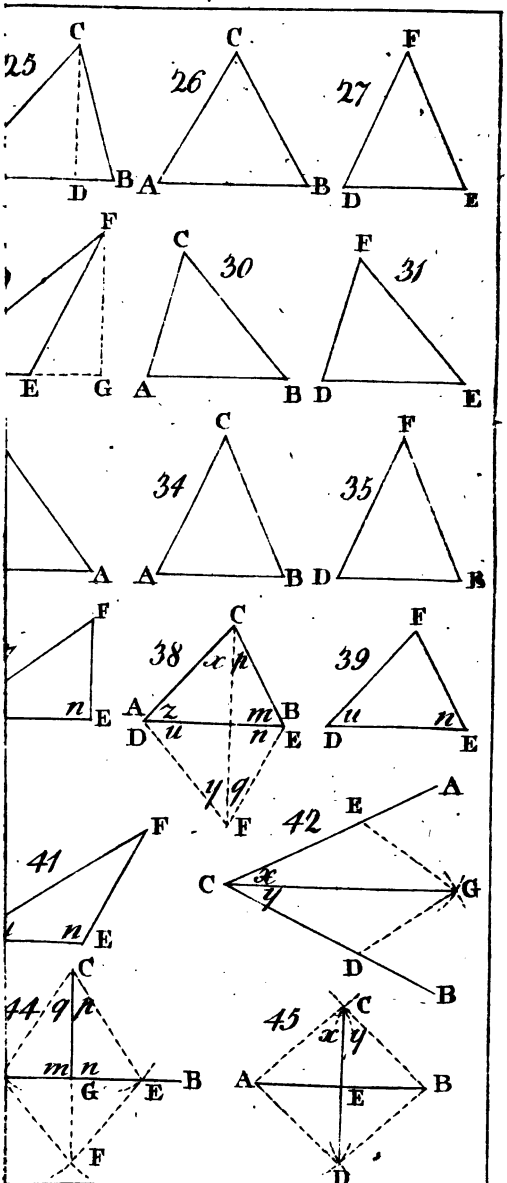
| | | | |
|---|---|---|---|
| 4. Fig. 269. | Zwey Seiten, AB und BC, nebst dem eingeschlossenen Winkel B. | Winkel A und C. | (BC + AB) : (BC — AB) = Tang. (½A + ½C) : Tang. (½A — ½C). Auf die Art findet man die halbe Differentz der Winkel A und C, deren halbe Summe bekannt ist, und daraus die Winkel A und C selbst (§. 25.). |
| 5. Fig. 270. | Alle drey Seiten, AB, BC und AC. | Die Winkel A, B und C. | Man ziehet eine senkrechte Linie aus der Spitze des Winkels C auf die Grundlinie AB, und findet daraus die abgeschnittenen Stücke der Grundlinie: AB : BC + AC = BC — AC : DB — AD. Hat man auf die Art DB und AD gefunden, so ist im △ BDC, CB : BD = R : Cos. B (§. 14.), und im △ ADC, AC : AD = R : Cos. A (§. 14.). Den Winkel C findet man, wenn man A + B von 180° abzieht. |

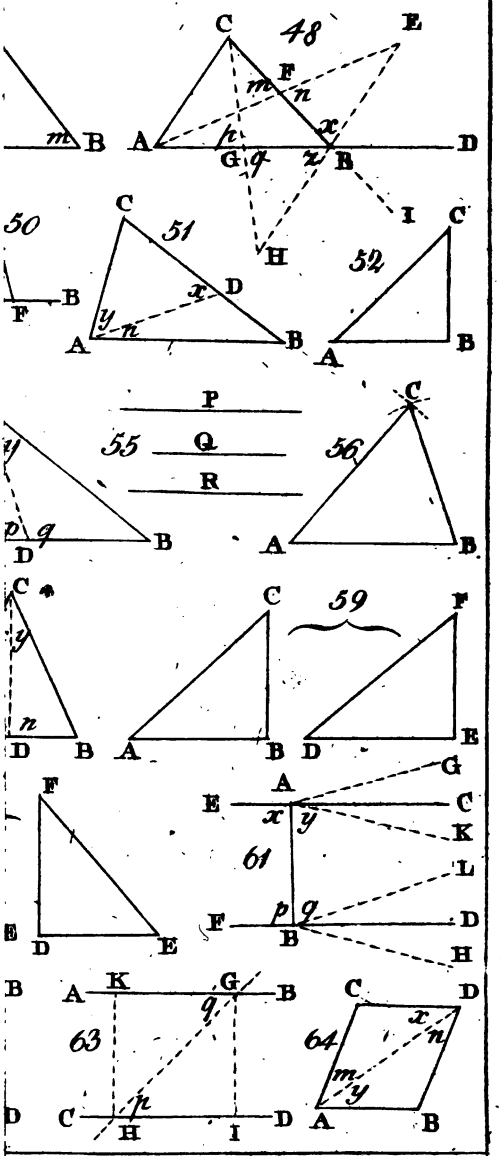
Ende.

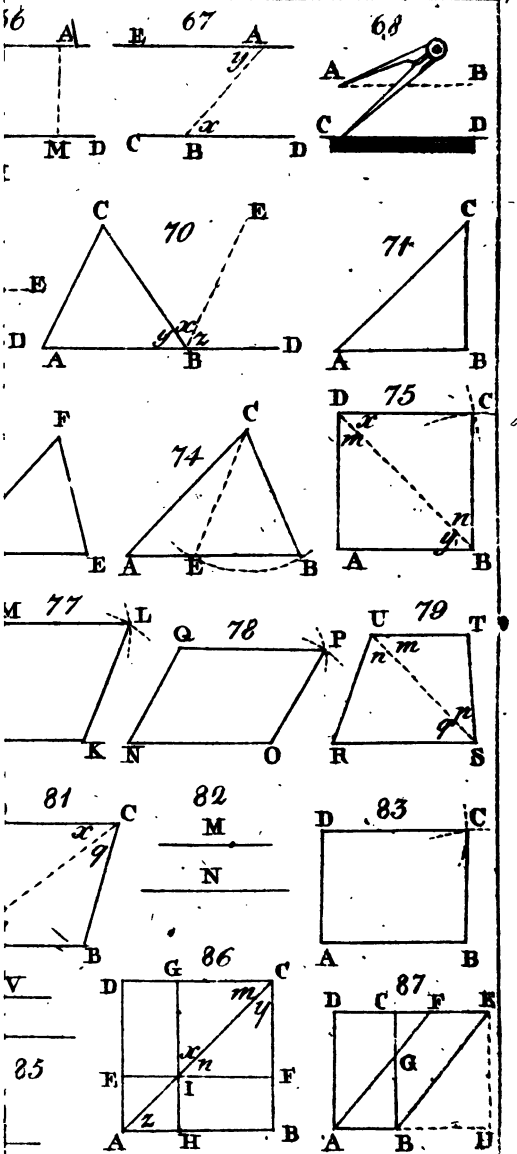
Hamburg,
gedruckt bey Gottl. Friedr. Schniebes.

Tab. I.

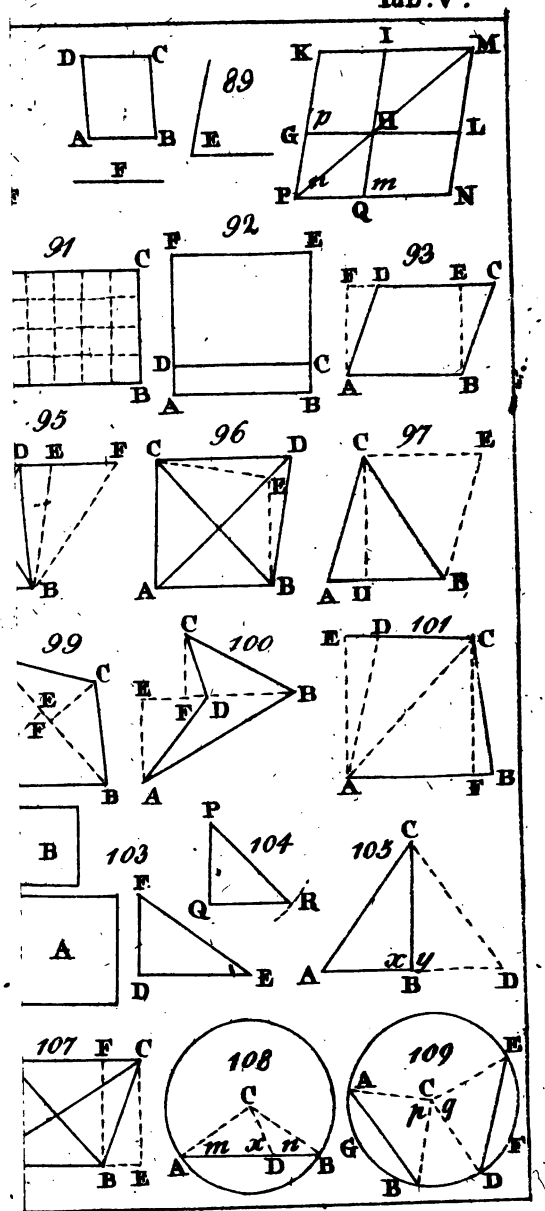

3
B
C
E
4
C
A
B
D
5
C
A
B
D
D
7
D
B
A
C
B
8
E
D
x
y
A
C
B
10
P.
N
C
I
O
11
A
B
C
D
12
A
B
C
14
F
B
E
C
D
A
15
A
G
B
H
C
16
D
I
E
K
F
18
G
D
F
C
B
19
G
x
y
A
C
B
20
G
E
g
e
D
d
A
a
C
b
B
f
F
22
D
B
A
C
E
B
23
A
B
y
z
x
D
c
q
p
F
G

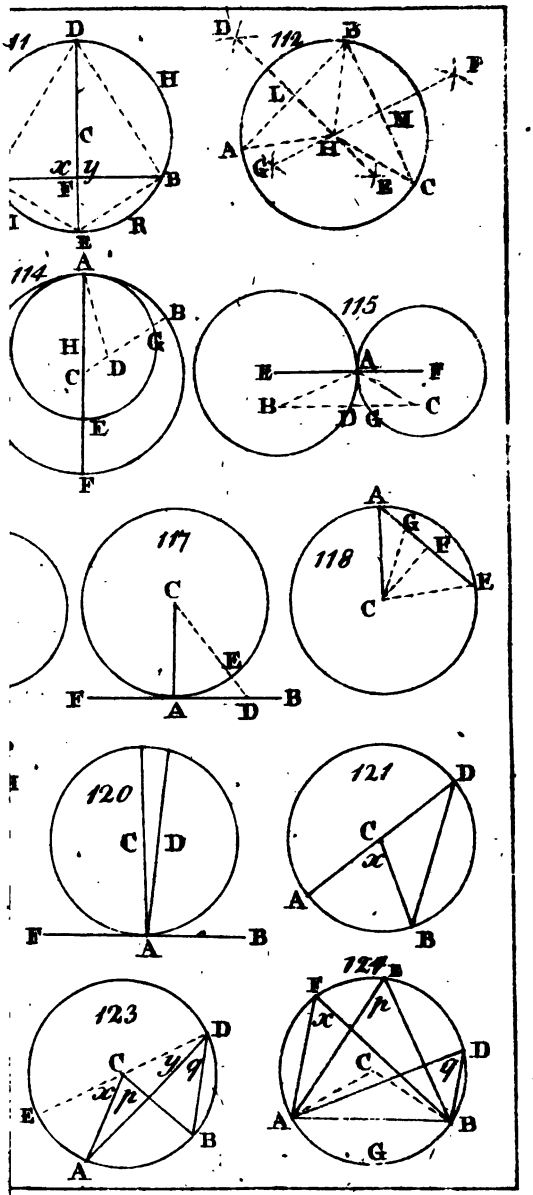

25
C
D
B
26
C
A
B
27
F
D
E
F
E
G
30
C
A
B
31
F
D
E
C
34
A
B
35
F
D
F
n
E
38
C
x
p
A
z
m
B
D
u
n
E
y
q
F
39
F
u
n
D
E
41
F
n
E
42
E
A
C
x
y
G
D
B
44
C
q
p
m
n
G
E
B
F
45
C
x
y
A
E
B
D

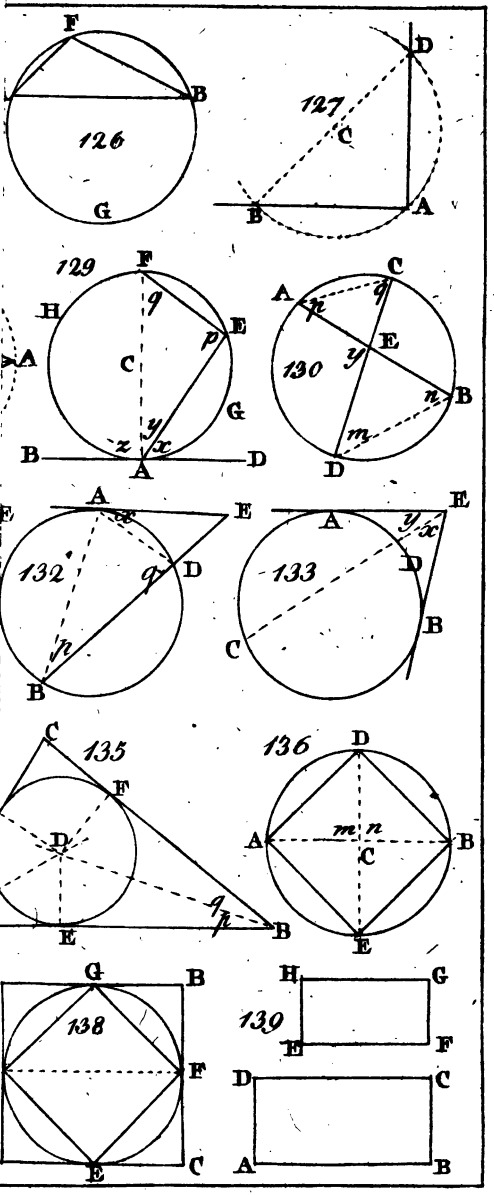

48
C
E
F
m
n
m
B
A
h
x
D
G
g
x
B
I
H
50
51
52
C
C
F
B
x
D
y
n
A
B
A
B
P
55
Q
56
R
C
y
p
q
D
B
A
B
C
C
59
F
y
n
D
B
A
B
D
E
F
A
G
E
C
x
y
K
61
L
E
D
E
F
p
q
D
B
H
B
A
K
G
B
q
63
64
C
D
x
n
m
y
D
C
h
D
H
I
A
B

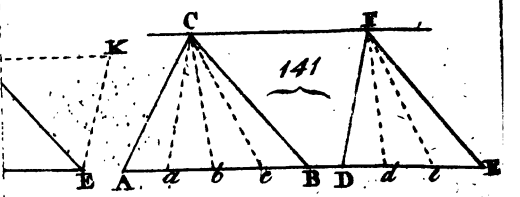

66
A
M
D
67
E
A
y
x
C
B
D
68
A
B
C
D
C
70
E
E
D
A
B
D
y
x
z
C
71
A
B
F
E
74
C
A
E
B
D
75
C
x
m
n
y
A
B
M
77
L
K
Q
78
P
N
O
U
79
T
n
m
q
r
R
S
81
C
x
q
B
82
M
N
83
D
C
A
B
V
85
G
86
C
D
m
y
x
n
E
I
F
z
A
H
B
87
D
C
F
E
G
A
B
H

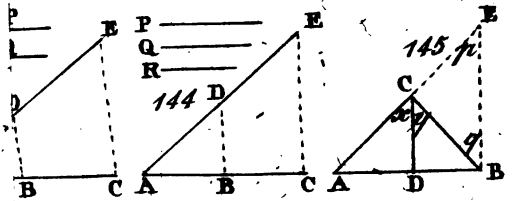
Tab. V.

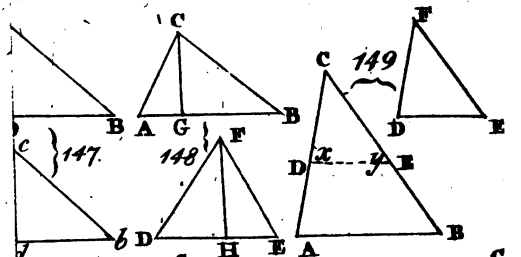

D C A B F
89 E
K I M G p H L P n m N Q
91 C B
92 F E D C A B
93 F D E C A B
95 D E F B
96 C D E A B
97 C E A H B
99 C E F B
100 C E F D B A
101 E D C A F B
B A
103 F D E
P Q R
104
105 C A x y B D
107 F C B E
108 C A m x n D B G
109 E A C p g B D F

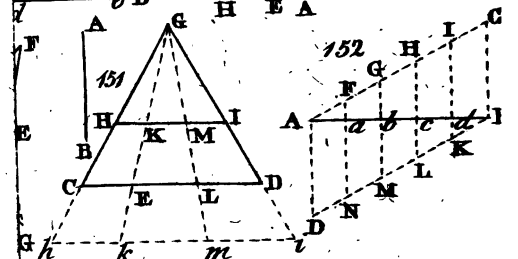

111
D
H
C
x
y
F
B
I
R
E
112
D
E
F
L
M
A
H
G
E
C
114
A
B
H
G
C
D
E
F
115
E
A
F
B
D
G
C
117
C
E
F
A
D
B
118
A
G
F
E
C
120
C
D
F
A
B
121
D
C
x
A
B
123
D
C
y
q
x
p
E
B
A
124
F
E
x
p
C
D
q
A
B
G

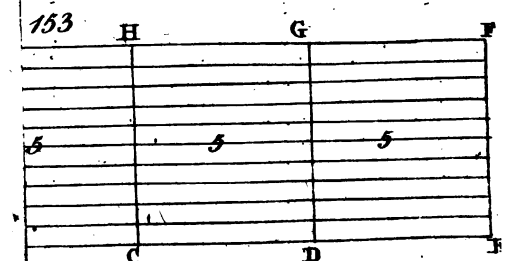

F
B
126
G
D
127
C
B
A
129
F
H
E
A
C
p
q
G
y
x
z
B
A
D
C
A
q
p
E
130
y
B
n
m
D
A
E
F
132
D
q
n
B
A
E
133
y
x
D
C
B
C
135
F
D
E
q
p
B
D
136
A
m
n
B
C
E
G
B
138
F
E
C
H
G
139
E
F
D
C
A
B


K
C
F
141
E
A
a
b
e
B
D
d
f
E

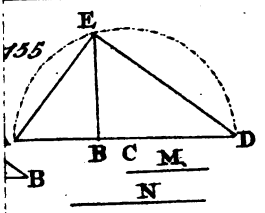

E
P
Q
R
144
D
E
145
f
C
x
y
q
B
C
A
B
C
A
D
B

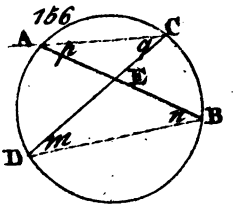

C
B
A
G
B
149
C
F
D
E
c
147
148
F
D
x
y
E
b
D
H
E
A
B

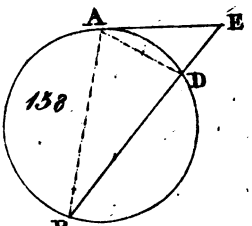

A
G
F
151
152
H
I
C
G
F
E
H
I
A
a
b
c
d
I
B
K
M
K
L
C
D
E
L
M
N
D
G
h
k
m
i

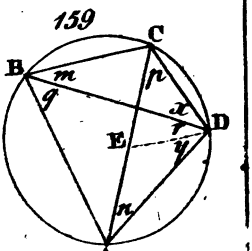

153
H
G
F
5
5
5
C
D
E

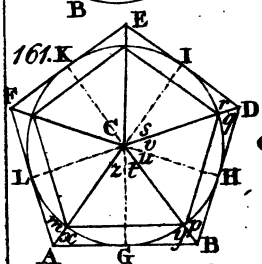
# Tab. IX.

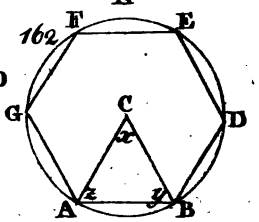

155
E
B C M
D
B
N


156
A
C
p
q
E
n
B
m
D

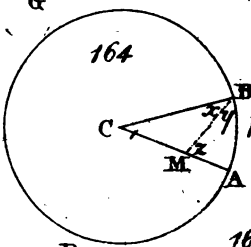

158
A
E
D
B

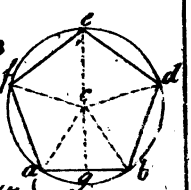

159
C
B
m
p
q
x
D
E
r
y
n
A

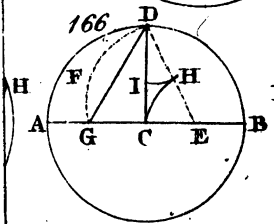

161
K
E
I
F
D
C
s
v
u
L
z
t
H
m
x
p
A
G
B

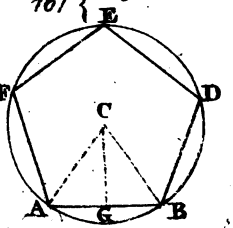

162
F
E
G
C
D
x
z
y
A
B

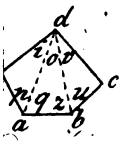
R

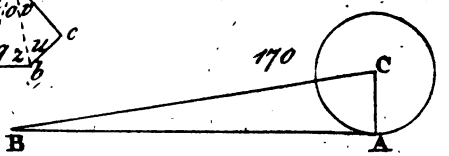

164
B
C
x
y
z
M
A

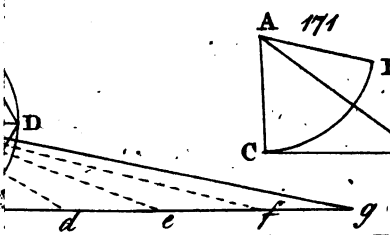

c
d
e
f
a
g
b

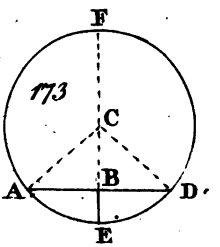

166
D
H
F
I
H
A
G
C
E
B

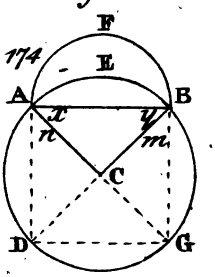

167
E
F
D
C
A
G
B

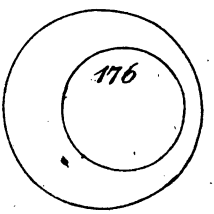

d
c
a
b

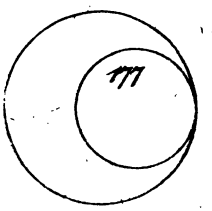

170
C
B
A

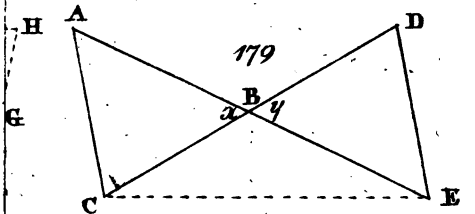

A
171
D
C
B
D
d
e
f
g


F
173
C
A
B
D
E

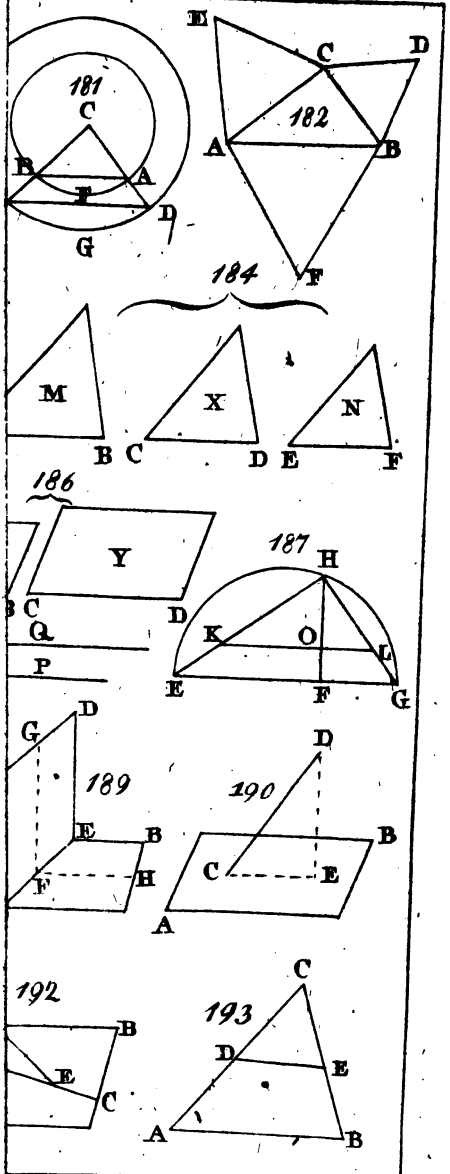

F
174
E
A
B
x
y
n
m
C
D
G

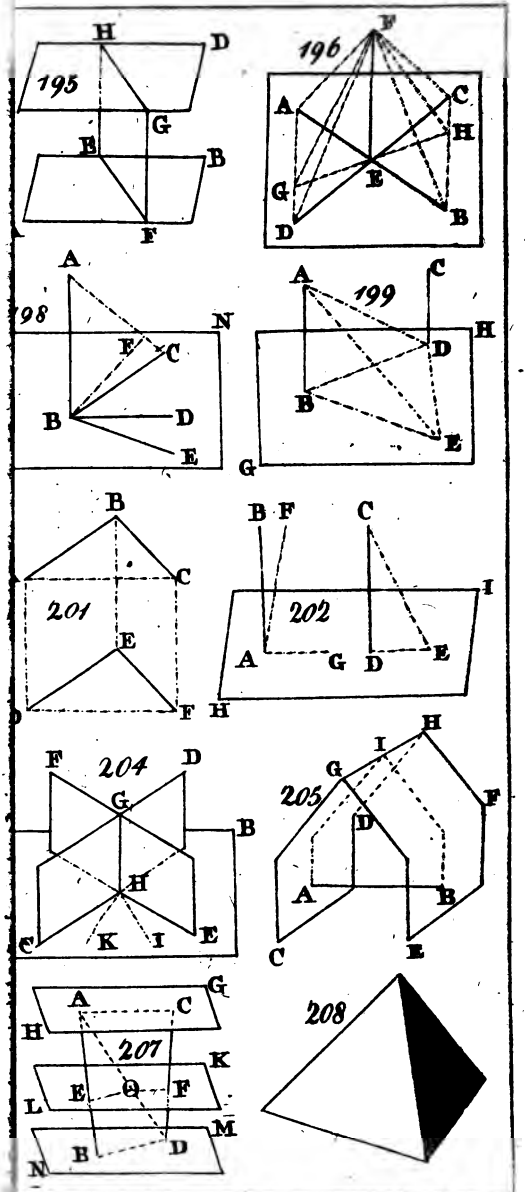

176

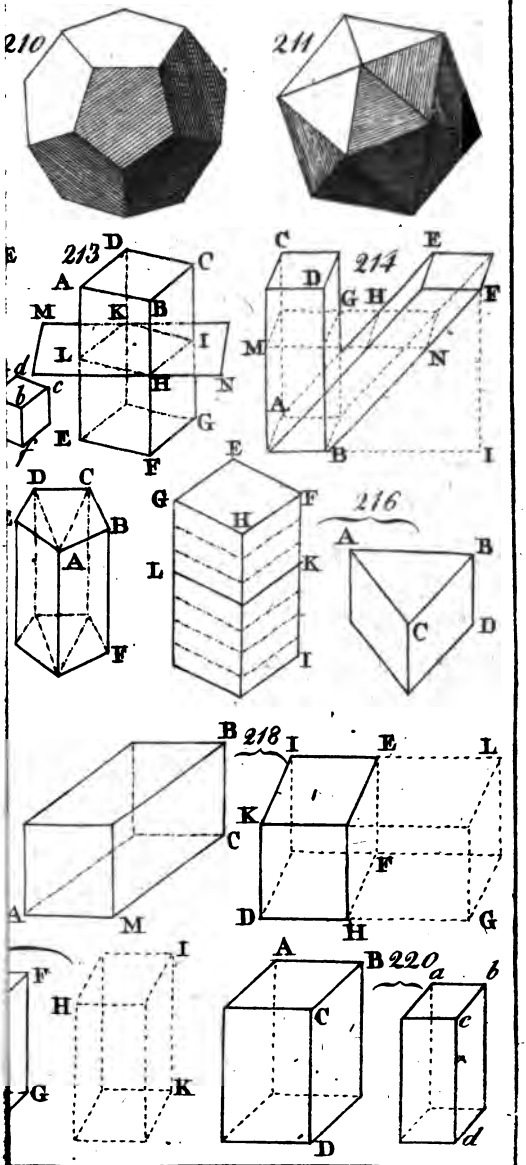

177


H
A
D
179
G
B
x
y
C
E

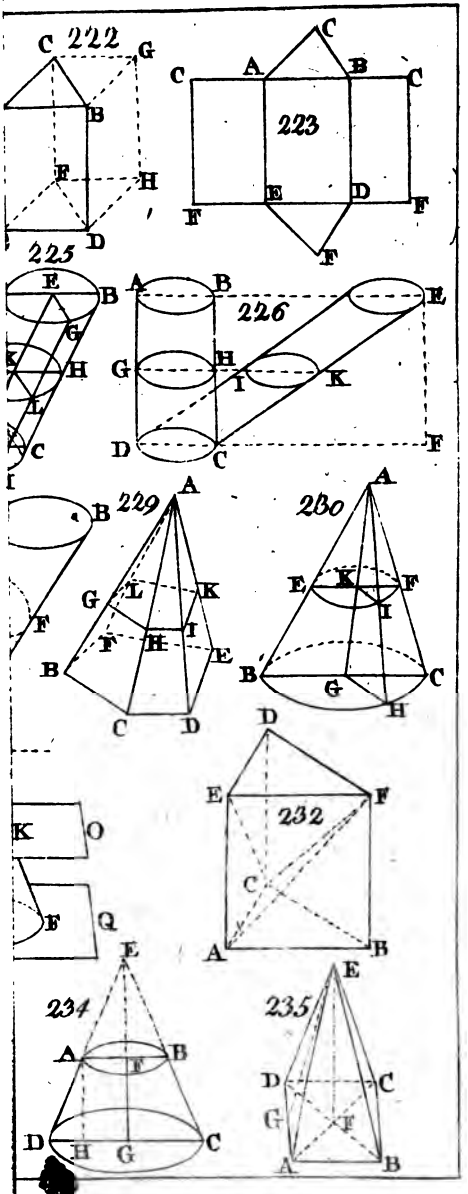
# Tab. XI.

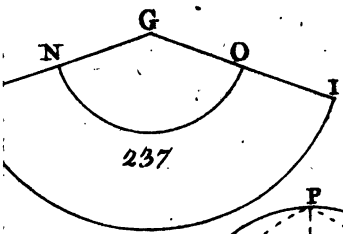

181
C
B
A
F
D
G
E
C
D
182
A
B
F
184
M
B
X
C
D
N
E
F
186
Y
C
Q
P
187
H
K
O
L
E
F
G
189
D
G
E
B
F
H
190
D
B
C
E
A
192
B
E
C
193
C
D
E
A
B


195
H
D
G
E
B
F
196
F
A
C
H
G
E
D
B
198
A
N
E
C
B
D
E
199
A
C
H
D
B
E
G
201
B
C
E
F
202
B F
C
I
A
G
D
E
H
204
F
D
G
B
H
C
K
I
E
205
H
I
G
F
D
A
B
C
E
207
A
C
G
H
K
E
O
F
L
M
B
D
N
208

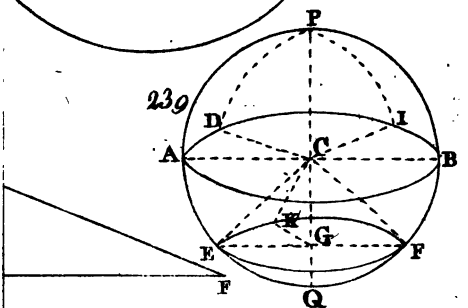

210
211
213
D
C
A
M
K
B
I
L
H
N
d
c
b
G
E
F
214
C
E
D
G H
F
M
N
A
B
I
D C
B
A
F
E
G
H
L
K
I
216
A
B
C
D
218
B
I
E
L
K
C
F
A
M
D
H
G
F
H
I
G
K
A
B
220
a
b
C
c
D
d

Tab XIV



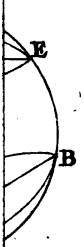



237

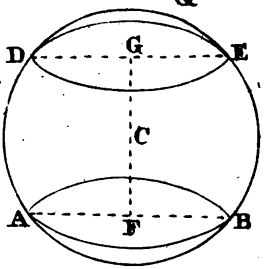



239

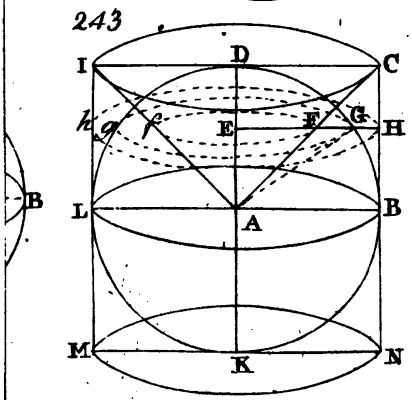


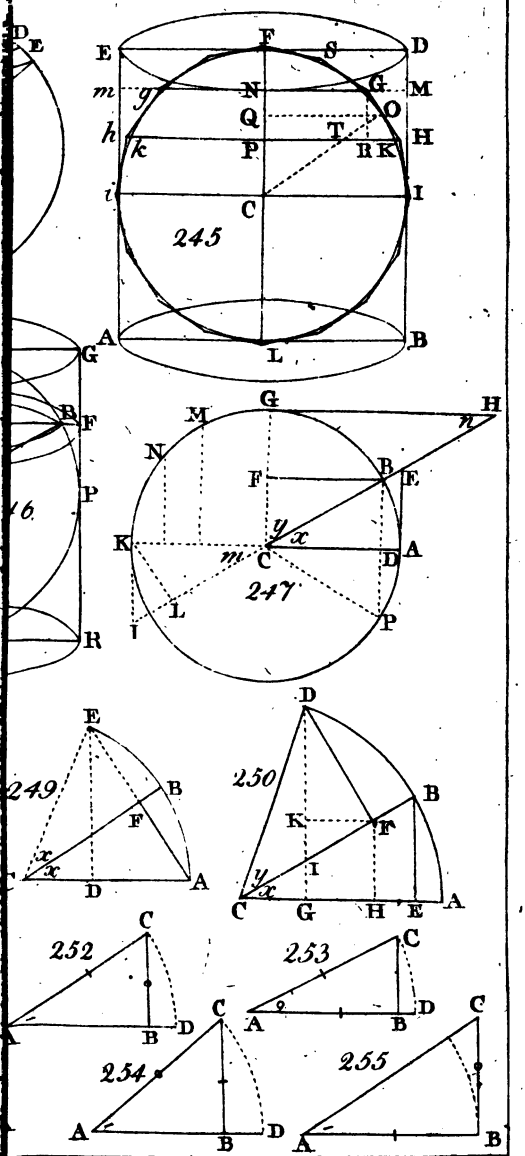

241



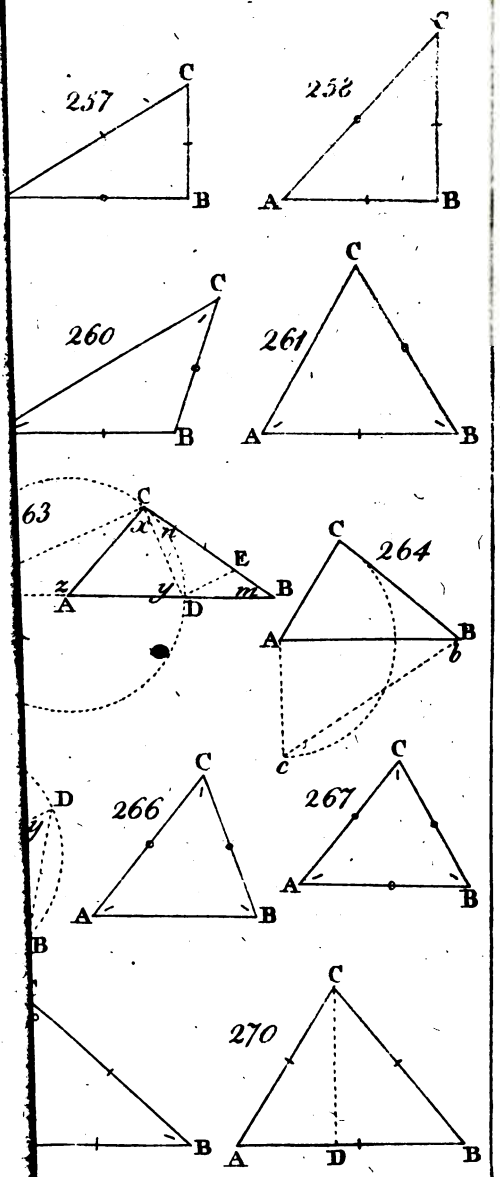

243



Tab XVI.



# Tab XVII.


257
C
A
B
258
C
A
B
260
C
A
B
261
C
A
B
63
C
x
n
E
z
A
y
D
m
B
264
C
A
B
b
c
D
y
B
266
C
A
B
267
C
A
B
270
C
A
D
B